ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Neue Analyse der beiden Meteoreisenmassen von Lénarto und Agram, nebst einigen Bemerkungen über den Ursprung der Meteormassen überhaupt;

vom
Med. Dr. Ritter von *Holger*.

(Im Auszuge vorgetragen in der physikalisch-chemischen Section der Versammlung der deutschen Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg, den 23. September 1829.)

Es haben zwar die Meteoreisenmassen, gleich den eigentlichen Meteorsteinen, in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit der Naturforscher in immer gesteigertem Verhältnisse auf sich gezogen, doch bleiben sie noch in so mancher Beziehung in Dunkel gehüllt, und fordern zu genaueren Nachforschungen auf, da die nähere Kenntniſs ihrer Zusammensetzung und Bildung in enger Beziehung zu dem Leben des Erdkörpers steht, und manches darüber noch Unbekannte vielleicht aufhellen dürfte. Die Entdeckung der *Widtmanstädt*'schen Figuren lieſs zuerst Regelmäſsigkeit ihres Gefüges vermuthen, und führte zur Voraussetzung einer höheren Ordnung in ihrer Mischung; allein, um diese zu erkennen, ist bisher nur wenig gethan. Es fehlt nicht an Analysen der Meteorsteine, doch sind sie häufig widersprechend, und wurden selten benützt, um allgemeine Ansichten darauf

zu gründen. Die Meteoreisenmassen aber wurden meistens nur oberflächlich untersucht; denn, da man einmal den Nickelgehalt derselben als Charakter ihres meteorischen Ursprungs ansah, begnügte man sich, sie bloſs auf Nickel zu untersuchen, und hielt sie ohne hinreichende Gründe für reines Nickeleisen. Ich glaube nicht, daſs ihr Nickelgehalt für ihren Ursprung etwas beweisen könne, so lange nicht gezeigt werden kann, daſs ein Gediegeneisen, dessen tellurischer Ursprung unbestreitbar dargethan ist, Nickellos sey, zumal man das Gediegeneisen, welches viele Meteorsteine als Schichten enthalten, in denen von *Stannern, Agen, Chassigny, Jonzac, Leontalax* Nickelfrei gefunden hat. Auch scheint mir kein Grund vorhanden, alle anderen Bestandtheile von der Zusammensetzung dieser Eisenmassen auszuschlieſsen, seit *Chrom* und *Schwefel* von *Laugier* in der Pallas'schen Masse, *Kobalt* von *Stromeyer* in der Lap'schen, von *John* in der Pallas'schen und Ellenbogner gefunden wurde. Mit der Überzeugung, durch eine genaue Untersuchung derselben mehrere noch nicht darin gefundene Bestandtheile nachweisen zu können, begann ich die Analyse des Ellenbogner Meteoreisens (d. Ztschft. V. Bd. 1. Hft.), und fand darin Eisen, Nickel, Kobalt, Alumium, Chrom, Mangan, und es war mir sehr willkommen, als sich bald eine günstige Gelegenheit darbot, an mehreren ähnlichen Massen Untersuchungen anstellen zu können.

Nach dem Wunsche des Hrn. Regierungsrathes und Naturalien-Cabinetts-Directors *v. Schreibers* unternahm ich es, die Meteormassen der reichhaltigen Sammlung des k. k. Naturalien-Cabinetts neu zu analysiren, da die vielen Abweichungen, welche an den bereits vorhandenen Analysen derselben bemerkt wurden, mit einigem Grunde nur dadurch vermieden werden könnten,

dafs sie alle von demselben Arbeiter nach gleicher Methode und unter möglichst ähnlichen äufsern Einflüssen untersucht würden. — Wenigstens durfte auf diese Art eine relative Gewifsheit erwartet werden, so dafs doch die gefundenen Stoffe als unzweifelhaft vorhanden angenommen werden konnten, wenn gleich durch ein Verfahren nach andern Methoden und vielleicht durch geübtere Arbeiter, Berichtigung der gefundenen Quantitätsverhältnisse und Auffindung noch anderer Bestandtheile nicht unmöglich blieb. — Ich begann meine Arbeit mit Untersuchung der beiden Massen von *Lénarto* und *Agram*, um somit, in Verbindung mit der bereits gelieferten Analyse der *Ellenbogner* Masse, die Reihe der drei *inländischen derben nickelhältigen Gediegeneisenmassen* zu vollenden, wornach ich sofort zur Analyse der übrigen schreiten werde.

Die *Agramer Masse* ist in so ferne merkwürdig, als sie die feste Meteoreisenmasse war, bei welcher das Niederfallen beobachtet wurde, und hinreichend erwiesen ist. Sie fiel den 26. Mai 1751 bei Hradschina im Agramer Comitate. — In der k. k. Sammlung befindet sich ein Stück davon im Gewichte von 78 Pf. Zur Untersuchung erhielt ich 59.61 Grane. — Der zweite wirklich beobachtete Meteoreisenfall seit dieser Zeit ereignete sich im Jahre 1780 bei Kinsdale in Neuengland.

Die *Masse von Lénarto* wurde, 194 Pf. schwer, im Jahre 1814 von Bauern auf einem der höchsten Karpathengipfel im Walde Lénartunka gefunden, von ihnen nach ihrem Wohnorte Lénarto im Sarosser Comitate gebracht, wo sie dann vom Hrn. von *Kappi*, Gutsbesitzer, gekauft wurde. Das Museum zu Pesth erhielt davon 133 Pf., das k. k. Mineralien-Cabinett 5 Pf. 24 Loth. Zur Untersuchung wurden mir 211.2 Grane übergeben, die zu zwei übereinstimmenden Analysen verwendet wurden.

In beiden Massen war der Nickelgehalt bereits durch Versuche nachgewiesen, jedoch fand ich nur von der Agramer Masse eine vollständige Analyse, die *Klapproth'*sche, vor, nach welcher sie aus 96.5 Eisen und 3.5 Nickel besteht.

Eine genaue Beschreibung des Äufsern dieser Massen, so wie der an ihnen bemerkten *Widtmanstädt'*schen Figuren, findet sich in *v. Schreibers* Beiträgen zur Kenntnifs der Meteormassen, daher ich sie hier übergehe.

Die mir übergebenen Stücke waren durchaus gleichartig, ohne Risse, Rostflecken oder eingesprengten Schwefelkies. Sie wurden vom Magnete gezogen, und waren durch die Feile nur mit grofser Anstrengung in kleinere Stücke zu zertheilen. — Beide lösten sich in Salzsäure, die nach und nach mit Salpetersäure versetzt wurde, mit Beihülfe der Wärme zu einer grünlichen Flüssigkeit auf, und zwar ohne Entbindung von Hydrothiongas, Ausscheidung von Schwefel oder Zurücklassung eines unlöslichen Rückstandes. Es war daher weder Schwefel, noch ein Metallcarbonid, noch Kieselsäure in gröfseren Mengen vorhanden.

Die Agramer Masse löste sich in geringerer Zeit und leichter in der Säure. Sie bedurfte einer geringeren Menge derselben, und einen geringeren Wärmegrad zur Auflösung, als jene von Lénarto. Letztere liefs auch einige parallelepipedische Stücke ungelöset, die aber darum nicht unlöslich waren, indem sie sich in gemeiner Temperatur nach einigen Wochen, mit concentrirter Säure gekocht, viel schneller und ohne Rückstand lösten. Das Zerfallen in kleinere tafelförmige und parallelepipedische Stücke, die gleichsam das Gerippe der ganzen Masse bildeten, zeigte sich an der Agramer vorzüglich deutlich. Diese Stücke löseten sich später, doch

vollkommen, ohne concentrirte Säure oder Kochhitze anzuwenden *).

---

*) Auch von dem Ellenbogner Eisen war es schon längere Zeit bekannt, dafs dasselbe aus einer in Säure leicht, und aus einer darin schwerer auflöslichen Masse bestehe, welche letztere bei der Auflösung gerippartig zurückbleibt. Die Vermuthung *Neumann's* und Mehrerer, dafs dieser verschiedene Grad von Auflösbarkeit in einem verschiedenen Verhältnisse des Nickels zum Eisen begründet sey, wurde durch *Moser's* interessante Analyse (*v. Schreibers* Beiträge, S. 84) bestätigt, und es ist nicht zu zweifeln, dafs derselbe Grund auch für die hier untersuchten Eisenmassen gilt, da er sich auf dieselbe Art, wie bei jenen, auch bei diesen zu erkennen gibt. Nur dürfte man, nachdem einmal mehrere Bestandtheile in ihnen aufgefunden sind, nicht geradezu annehmen, dafs das wechselnde Verhältnifs des Nickels zum Eisen allein den Charakter dieser beiden Theilmassen bilde, sondern nur überhaupt, dafs die Bestandtheile nicht durch die Gasammtmasse in demselben Verhältnisse vertheilt vorhanden seyen. Dadurch wird es aber einleuchtend, wie zwei Analysen derselben Meteoreisenmasse, besonders wenn ihnen nur kleine Stücke zu Grunde gelegt werden, quantitativ, und vielleicht auch qualitativ abweichen können, ohne dafs man defswegen den Experimentator eines Versehens zeihen könnte. Ich habe mich bereits (d. Zeitschr. Bd. V. S. 6) darüber ausgesprochen, wie frühere Chemiker, bei der von ihnen befolgten Untersuchungsmethode, nur Eisen und Nickel in dem Ellenbogner Eisen finden konnten. Wenn aber *Moser*, a. a. O., der mit allen Methoden der neueren Analytik gewifs bekannt war, und dem man auch Mangel an Genauigkeit nicht vorwerfen konnte, ausdrücklich angibt: das Ellenbogner Eisen enthalte blofs Eisen und Nickel, und namentlich weder Silicium, Chrom noch Kobalt, auf welche er besonders untersuchte, so bleibt diefs auffallend, da ich doch gewifs bin, mich bei der Auffindung dieser Stoffe nicht getäuscht zu haben, die von mir an-

Diese sauer reagirenden Auflösungen wurden durch einen Strom von gasförmigem Schwefelperhydrid auf jene Metalle untersucht, deren Sulfuride in Säuren nicht auflöslich sind. Es zeigte sich kein Niederschlag.

Nun wurde die freie Säure durch Kali gebunden, und zugleich ging die *grüne* Farbe der Auflösung im Verhältnisse der steigenden Neutralität in eine *blutrothe* über.

Hierauf wurde der neutralen Auflösung so lange *benzoesaures Kali* zugesetzt, als noch ein Niederschlag entstand. Dieser, das *benzoesaure Eisenoxyd*, wurde gewaschen, in gelinder Wärme bis zur staubigen Trockne gebracht, und aus einer Probe desselben das Eisenoxyd rein auf folgende Weise geschieden: Sie wurde nämlich im Porzellantiegel geglüht, während des Glühens concentrirte Salpetersäure so lange zugesetzt, bis das durch die Kohle der verbrannten Benzoesäure reducirte Eisenprotoxyd wieder oxydirt, und die überschüssige Kohle als Carbonsäure verflüchtiget war. Das nun reine Eisenperoxyd konnte für die ganze Menge des erhaltenen benzoesauren Eisenperoxydes berechnet, und aus ihm die Menge des in der Meteoreisenmasse vorhandenen Eisens gefunden werden.

Würde die Meteoreisenmasse *Cer* enthalten haben, so wäre diefs zugleich mit dem Eisenoxyde durch die Benzoesäure gefällt worden. Es wurde daher eine Probe

gewendete Untersuchungsmethode weder neu noch unbekannt war, und Kobalt auch von *John* gefunden wurde. — Diefs, wie auch die so sehr abweichende Gewichtsmenge des Nickels, welche nach *Moser* 7.29, nach mir 2.47 beträgt, läfst sich nicht anders als durch ungleiche Vertheilung der Bestandtheile erklären, da ein so bedeutender Fehler, als dieser Abweichung zu Grunde liegen müfste, kaum denkbar ist.

eigens durch *schwefelsaures Kali* auf dieses Metall geprüft, und davon rein befunden.

Diejenigen Körper, welche das benzoesaure Kali nicht fällte, wurden, in Verbindung mit den Aussüfswässern des Eisensalzes, mit *Kali* versetzt, um alle noch übrigen Metalloxyde abzuscheiden; denn, da die Auflösung nun eine beträchtliche Menge Salze enthielt, die auf das weitere Verfahren durch Bildung von Doppelsalzen störend einwirken konnten, so war es gerathener, sie zu entfernen. Das Kali erzeugte einen *apfelgrünen* Niederschlag, der zu weiterer Untersuchung aufbewahrt blieb. Die Salzlauge wurde weggegossen, nachdem sie vorher auf *Thonerde* und *Kieselsäure* geprüft worden war. Ersteres geschah durch Zusetzen des Ammoniaks, letzteres durch Säure, welche zugesetzt, die Probe damit zur Trockne abgeraucht, und wieder in Wasser gelöset wurde. Es zeigte sich keine Spur von beiden.

Der grüne Niederschlag wurde nun in Salpetersäure aufgelöset. Es blieb ein unlöslicher Rest, der gallertartig aussah, und zu einem weifsen Pulver eintrocknete, welches nach dem Ausglühen rauh anzufühlen war. Es war weder in Säuren noch in Chlor löslich, löste sich leicht in Kalilauge, und wurde als weifse Gallerte wieder aus dieser Lösung gefällt. Es war sonach *Kieselsäure*, und aus ihr konnte nach dem Ausglühen das in der Meteoreisenmasse vorhandene Silicium berechnet werden.

In der Auflösung wurde weder durch Verdünnung mit Wasser *Wismuth*, noch durch Schwefelsäure *Baryt* oder *Strontian* angezeigt. Sie wurde sofort mit *Ammoniak* versetzt, der sie in einen Niederschlag und eine blafsblaue Auflösung zerlegte.

Aus der blauen Auflösung schied überschüssige Kalilauge das *Nickel* als *Nickeloxydhydrat*. Dieses wurde

gewaschen, getrocknet, und im offenen Tiegel so lange geglüht, bis es in Peroxyd verwandelt war, aus welchem sodann das metallische Nickel berechnet wurde. Die übrige Auflösung war gelblich, und roch stark nach Ammoniak. Dieses wurde theils durch Einkochen entfernt, theils durch Säurezusatz gebunden, und dann carbonsaures *Kali* zugesetzt. Es entstand dadurch ein blaſsrother Niederschlag, der sich als *carbonsaures Kobalt* erwies, da er in Säuren mit Brausen löslich war, und diese Lösung mit Kali einen blauen, mit Blutlauge einen grünen Niederschlag gab. Es wurde getrocknet, und das vorhandene *Kobalt* daraus berechnet.

Der durch Ammoniak erzeugte Niederschlag wurde in Salpetersäure gelöset, und die Lösung durch *carbonsaures Ammoniak* zerlegt. Der nun entstandene Niederschlag wurde abgesondert, rein ausgewaschen, auch in Salpetersäure gelöset, und durch *reines Ammoniak* zerlegt. Die Flüssigkeit wurde dabei rosenroth, zum Zeichen, daſs noch Kobalt vorhanden war, und es schied sich ein geringer weiſser Niederschlag aus, der wegen seiner geringen Menge keine entscheidenden Versuche anzustellen erlaubte. Ich hielt ihn für *carbonsaures Mangan*, da er mit Säuren brauste, getrocknet die Farbe dieses Salzes annahm, und beim Glühen braunschwarz wurde. Chlorkalk fällte ihn, jedoch nicht mit brauner Farbe, aus seiner Auflösung, wie sich dieſs von einem Mangansalze erwarten lieſs. — Er betrug für das Eisen von Lénarto 1.07, für das Agramer 0.16. Das daraus berechnete Mangan wurde der später gefundenen Menge dieses Metalls zugeschlagen.

Die rosenrothe Auflösung wurde durch *carbonigsaures Ammoniak* auf Kalk untersucht. Es entstand ein weisser Niederschlag, der ganz das Charakteristische des *carbonigsauren Kalkes* hatte, der durch die Langsamkeit

und die Art seiner Ausscheidung sich von ähnlichen weissen Niederschlägen leicht unterscheiden läſst, und auch deſswegen nicht wohl für einen andern Körper angesehen werden konnte, weil *Baryt* und *Strontian* nicht vorhanden, und die *Thonerde* bereits entfernt war. Aus dem getrockneten reinen Niederschlage wurde der Kalk, und aus diesem das Calcium berechnet.

Nach Entfernung des Kalks gab noch *phosphorsaures Natron* einen weiſsen Niederschlag, welcher getrocknet und auf *Magnium* berechnet wurde, nachdem sich durch einen Löthrohrversuch gezeigt hatte, daſs es nicht *Lithon* war. Weder der Kalk- noch der Magnesianiederschlag konnte Kobalt enthalten, da während des ganzen Verfahrens freies Ammoniak in der Flüssigkeit blieb, welches das Kobalt zurückhielt, und die deutliche rosenrothe Färbung derselben nicht nur nicht verschwand, sondern immer stärker hervortrat. Es wurde daher, nach der bereits angegebenen Methode, am Ende das carbonsaure Kobalt aus ihr geschieden, daraus das *Kobalt* berechnet, und mit der früher gefundenen Menge dieses Metalls vereinigt.

Nun war noch der früher angeführte, durch carbonsaures Ammoniak entstandene, Niederschlag zu untersuchen. Er wurde in *Kalilauge* gekocht, das Kali durch Salzsäure neutralisirt, und dann durch *carbonsaures Ammoniak* die *Thonerde* gefällt, welche nun geglüht, und auf *Alumium* berechnet wurde. Nach Ausscheidung derselben wurde die Lauge neuerdings gekocht, um zu sehen, ob sie keine *Glycinerde* ausscheide, wovon sich aber keine Spur zeigte.

Der in Kali unlösliche Rest erwies sich nun als *Mangan*, weil er aus seiner Auflösung in Säuren durch Chlorkalk mit der entsprechenden Farbe gefällt wurde. Er war aus dem Lénartoer Eisen rein weiſs, aus dem

Agramer etwas grünlich. Letzterer wurde daher noch auf *Chrom* untersucht, jedoch statt diesem noch ein Hinterhalt von Eisen gefunden, der als die Ursache der grünen Färbung angesehen werden konnte; denn so wie das Mangan durch carbonsaures Ammoniak als Carbonat gefällt wurde, konnte dieſs auch bei dem Eisen geschehen, welches hier durch die groſse Menge des Mangans, in welchem es eingehüllt war, von dem Zutritte der Atmosphäre geschützt, seine grüne Farbe nicht wie gewöhnlich in die braune umwandelte.

* * *

Zufolge dieser Untersuchung ergab sich in beiden Meteoreisenmassen eine quantitative Zusammensetzung:

Im Eisen von Lénarto.		Im Eisen von Agram.	
Eisen	85.04	Eisen	83.29
Nickel	8.12	Nickel	11.84
Kobalt	3.59	Alumium	1.38
Calcium	1.63	Kobalt	1.26
Alumium	00.77	Silicium	00.68
Mangan	00.61	Mangan	00.64
Magnium	00.23	Magnium	00.48
Silicium	00.01	Kalium	00.43
	100.00		100.00

Diese beiden Meteoreisenmassen sind sich daher qualitativ vollkommen gleich, nur das Mengenverhältniſs der einzelnen Bestandtheile in der Gasammtmasse und vielleicht auch in den Theilmassen ist abweichend und begründet ihre Verschiedenheit, die sich durch Form und Gefüge ausspricht. Von der Ellenbogner Masse unterscheiden sie sich durch den Mangel des *Chroms*, denn Calcium und Magnium hoffe ich bei einer

zweiten Analyse desselben, wo ich an einem gröſseren Stücke die hier angewendete Methode in ihrer ganzen Ausdehnung werde durchführen können, auch darin aufzufinden.

Am meisten bemerkenswerth scheint es aber, daſs nun alle Bestandtheile der eigentlichen Meteorsteine auch in den Meteoreisenmassen nachgewiesen worden sind, indem selbst der Schwefel, welcher kein Bestandtheil der letzteren ist, in dem beigemengten Schwefeleisen derselben vorkommt.

Sind nun auch diese beiden groſsen Abtheilungen der Meteormassen qualitativ gleich, so zeigt sich doch ein anderer Unterschied, der sie als zwei wesentlich und deutlich geschiedene Classen darstellt, wie es das abweichende Mengenverhältniſs allein nicht zu thun im Stande wäre.

Es bestehen nämlich die Meteoreisenmassen aus *gediegenen* *), die Meteorsteine aus *oxydirten* leichten und schweren Metallen, und stehen sonach im *electrochemischen Gegensatze*, der noch schärfer dadurch ausgedrückt wird, daſs in ersteren das rein positive *Eisen*, in letzteren die negative *Kieselsäure* vorwaltet. — Allein, wie es in der ganzen Natur keinen reinen Gegensatz ohne wechselseitige Durchdringung gibt, so bemerken wir auch hier in den Meteorsteinen *Schwefel-* und *Nickeleisen* als Nebenbestandtheil in gangartigen Schichten, in Nestern oder eingesprengt, während jenes Eisen, das Theil der Hauptmasse ist, als Oxyd mit den übrigen Oxyden in chemischer Verbindung vorkommt; in den Gediegen-

*) Ich glaube nicht, wegen dieser Angabe einen Vorwurf besorgen zu dürfen, da sowohl die gefundenen quantitativen Verhältnisse als die Ansicht der Massen selbst es deutlich zeigten, daſs sie keine Oxyde enthalten konnten.

eisenmassen den *Olivin*, der die Zwischenräume der zelligen Massen ausfüllt und dieselben Bestandtheile wie die Hauptmasse der Meteorsteine sämmtlich im oxydirten Zustande enthält; und es ist bei näherer Untersuchung und Vergleichung zu erwarten, daſs sich aus ihnen eine negative und positive Reihe, wie die der einfachen Körper, werde bilden lassen, deren eine stufenweise in die andere übergeht. Wenigstens fehlt es nicht an Meteorsteinen ohne Gediegeneisen, und an Gediegeneisen ohne Olivin; selbst der Schwefelkies, der in letzterem häufig die Stelle des Olivins vertritt, scheint schon die vollkommene Metallität deutlicher darzustellen, und daher eine Reihe anzudeuten, in welcher diese Massen höher als jene mit Olivin zu stehen kommen.

Vergleicht man nun die angegebene Zusammensetzung der Meteormassen mit der unserer Erde, so erscheint eine auffallende Ähnlichkeit zwischen beiden, die als Grundlage interessanter Folgerungen angesehen werden dürfte. — Unsere Erde besteht einerseits aus den Oxyden leichter Metalle, *Erden*, und ihren Verbindungen, *Steinen*; diese stellen, wie die Meteorsteine, den negativen Bestandtheil vor, auch sie enthalten die reinen Metalle nur als Nebenbestandtheil in Gängen, Nestern etc., auch in ihnen ist die Kieselsäure vorherrschend, zwar nicht im Individuum, sondern in der Gesammtheit, und auch sie schlieſsen sich durch mannigfaltige Übergänge an die gegenüberstehende Reihe; andererseits aus gediegenen Metallen, die den positiven Bestandtheil wie die Meteoreisenmassen bilden; auch unter ihnen ist das *Eisen* das vorherrschende, wenn es gleich auf der Erde nur selten im gediegenen Zustande vorkommt, weil dieses leicht oxydirbare Metall hier einer Menge oxydirender Einflüsse ausgesetzt ist, die während seiner Ausscheidung in der Atmosphäre und seines

schnellen Herabfallens nicht so heftig und anhaltend darauf wirken können.

Es bestehen sonach die Meteormassen aus denselben Bestandtheilen wie unser Erdkörper; es sind die einfachen Körper und die binären Verbindungen für beide gleich, letztere folgen denselben stöchiometrischen Gesetzen. Sie drücken beide den electrochemischen Gegensatz auf gleiche Weise aus. Ihre Verschiedenheit liegt blofs in ihren quaternären und vielleicht noch höheren Verbindungen, die wir den für den Erdkörper geltenden Gesetzen nicht zu unterwerfen vermögen. Ob sie in dieser Hinsicht vielleicht nach eigenen Gesetzen geordnet oder in stets wandelbaren Mengen, mehr Gemenge als Gemische darstellend, verbunden sind, mufs die Folge lehren. Immer aber scheint diese Betrachtung sehr gegen den kosmischen Ursprung der Meteormassen zu sprechen, und bei genauerer Auseinandersetzung mehr Gewicht zu haben, als ihr *Chladni* beilegen will.

Sind die einfachen Körper und binären Verbindungen der Meteormassen dieselben, wie auf unserer Erde, so ist die natürliche Folge, dafs sie auch von der Erde kommen, und sind die höheren Verbindungen nach den irdischen Körpern fremdartigen Gesetzen gebildet, so müssen erstere in der Atmosphäre eine Veränderung erleiden, bevor sie wieder zur Erde kommen können. — Diese Entstehungsart der Meteormassen trifft daher nicht mit der alten Hypothese der *Atmosphäristen* oder *Telluristen* überein, welche sie entweder aus den Urstoffen der Luft zusammensetzen, oder blofs das von der Erde Hinaufgehobene unverändert wieder zu ihr herabfallen lassen. Beide sind durch die dagegen vorgebrachten Gründe hinreichend widerlegt. Hier ist von einem *tellurisch-atmosphärischen* Ursprunge die Rede, der durch folgende Betrachtung wahrscheinlich gemacht wird.

Wenn jeder Körper in dem Sinne *Leben* besitzt, als er durch eine ihm eigenthümliche, von innen heraus thätige Kraft sich in seiner individuellen Form und Mischung erhält, und die äuſseren zerstörenden Einflüsse entweder von seinen Grenzen zurückweist, oder sie zu seinen Lebenszwecken verwendet, und wenn sie dazu nicht mehr dienen, in veränderter Form und Mischung wieder als unbrauchbar aussondert; so können wir mit einigem Rechte nicht nur die Mineralkörper der Erde, sondern auch die Atmosphäre im Ganzen lebend nennen. Alles Leben im angeführten Sinne bedingt und stellt sich durch stäten Wechsel der Materie, durch Aufnahme und Aussonderung, durch Auflösungen und Verbindungen dar. Es verlieren wohl alle festen Körper der Erde stets Theile ihrer Masse durch unmerkbare Ausdünstung, so wie die flüssigen, wenn sie uns auch nicht wie bei diesen sichtbar werden können *); und diese bilden den

*) Es fehlt uns nicht an Erfahrungen, daſs auch feste Körper Theile durch Ausdünstung verlieren, und viele dadurch endlich ganz verschwinden. Wo dieſs nicht geschieht, führt uns die Analogie mit andern, einst allein organisch genannten, Körpern dahin, eine Wiederaufnahme fremder Theile und Aneignung derselben vorauszusetzen. Bei der Atmosphäre ist dieser beständige Wechsel der Materie besonders deutlich, weil sie immer Oxygen und Azot verliert, und doch das bestimmte Verhältniſs beider nicht gestört wird, dessen Erhaltung nur einer ihr eigenen Kraft zugeschrieben werden kann, selbst in dem Falle, wenn sie ein bloſses Gemenge wäre, weil auch in diesem Falle das bestimmte Verhältniſs bleibt. Auch das lange Bestehen der Mineralkörper in unveränderter Form und Mischung scheint eine innere Kraft vorauszusetzen, die neue Theile aufnimmt und sich aneignet, da sie sonst den äuſseren Einflüssen viel früher als die organischen Körper, denen Niemand diese Kraft abläugnet, unterliegen müſsten.

Sand der Meteormassen, nicht aber die dampfförmigen Ausströmungen der Vulcane und der Hochöfen nach *Egen*, welche nicht hinreichen würden, jene zu bilden, und wenn sie schon als zufällige Beihülfen zu betrachten sind, nicht als Grundlage eines wesentlichen und regelmäfsigen Aussonderungsprozesses dienen könnten *). Sie werden von der Atmosphäre aufgenommen, und müssen wieder auf irgend eine Art zur Erde zurückkommen, wenn sie nicht endlich durch ihre Masse jene verdunkeln oder diese verschwinden machen sollten. Es wäre ein zu kühnes Unternehmen, einsehen zu wollen, wie sie in der Atmosphäre vorhanden sind und aus ihr abgeschieden werden; aber dafs es so seyn mufs, geht daraus hervor, weil sich jedes Leben durch einen ununterbrochenen Kreislauf ausspricht, der zwischen den so eng als wesentlich an einander geketteten Körpern, *Atmosphäre* und *Erde*, um so eher angenommen werden kann, als wir ihn an den tropfbaren Flüssigkeiten täglich vor Augen haben. Diese senden ihre Theile durch die Ausdünstung der Atmosphäre zu; sie werden von ihr aufgenommen, und wenn sie in zu grofser Menge vorhanden sind, wieder ausgeschieden, kommen als wässerige Luftmeteore zur Erde zurück, und so wird die Menge der irdischen Flüssigkeiten immer unverändert

---

*) Dafs die Atmosphäre zerlegend auf die aufsteigenden Dämpfe einwirke, scheint auch daraus hervorzugehen, weil die Meteorsteine nie *Arsenik* enthalten, der doch beim Rösten der Erze in nicht geringer Menge verflüchtigt wird. Bei den Eisenmassen, die geschmolzen zur Erde kommen, könnte man annehmen, dafs das reine oder Schwefelarsenik wieder verflüchtigt werde, wenn nicht das unveränderte Schwefeleisen, das sie enthalten, für das Gegentheil spräche. Ein Gleiches scheint auch vom Merkur zu gelten, dessen unmerkbare Ausdünstung nicht geläugnet werden kann.

erhalten *). Wir haben keinen Gegengrund, um nicht von den Theilen fester Körper dasselbe behaupten zu können; denn daſs diese in der Atmosphäre nicht chemisch nachgewiesen werden können, ist kein so wichtiger Einwurf, als *Chladni* S. 419 seines Werkes glaubt. Denn erstens ist er nicht ohne Ausnahme wahr, weil *Brandes* im Regenwasser *Eisen* und *Mangan* nebst mehreren Salzen nachwies, und in dem rothen Regen zu Blankenberg in Flandern 1819 nach wiederholten Analysen *salzsaures Kobalt* aufgefunden wurde. Diesen Körpern wird aber Niemand einen kosmischen Ursprung beilegen; sie kommen von der Erde, und es scheint mir nicht wohl anzunehmen, daſs sie nur mit den Wasserdämpfen fortgerissen wurden, weil ja doch die Erfahrung, die wir bei unsern Verdampfungen täglich machen können, nicht sehr für ein Fortführen der Oxyde und Metalle in gröſserer Menge, zumal in eine bedeutende Höhe, spricht; dann wäre es eine zu kühne Behauptung, wenn wir unseren Reagentien eine solche Untrüglichkeit beilegen, und die Existenz jedes Körpers durchaus abläugnen wollten, der chemisch nicht nachzuweisen ist. So wie wir das Eisen im unveränderten Blute nicht nachweisen können, könnten wir auch leicht viele Beispiele finden, daſs ein Körper, besonders in den organischen Verbindungen, auf eine Art vorhanden seyn

---

*) Es ist hier nicht von der Verdampfung durch Erhöhung der Temperatur die Rede, sondern von der unmerkbaren Ausdünstung, die bei jeder Temperatur Statt findet, so wie auch nicht von dem in der Luft frei schwebenden Wassergas allein, sondern auch von ihrem Hydrat- (*Meiſsner's* Anfangsgründe, II. Bd., S. 349) und Auflösungswasser, welches durch die Versuche (*Traité de Chimie, par Berzelius*, S. 412) nicht als durchaus unstatthaft erwiesen seyn dürfte.

kann, dafs unsere gewöhnlichen Reagentien nicht auf ihn wirken. Zudem ist gerade die Luft der höhern Regionen der Atmosphäre keiner chemischen Untersuchung zu unterwerfen. Es ist nicht zu läugnen, dafs die Annahme einer Bildung der Meteormassen innerhalb der Atmosphäre manche Schwierigkeiten hat, die selbst ihre scharfsinnigen Vertheidiger, Prof. *Egen* zu Sonst, *Gilbert's* Ann. 1822, Bd. 12, und *Baumgartner*, Handbuch der Naturlehre, S. 750, nicht ganz gelöset haben, und es wird uns vielleicht noch lange die deutliche Einsicht in die Prozesse der obern Luftregionen mangeln, zumal in dem Lebensvorgange unseres eigenen Körpers so manches mehr vermuthet wird, als hinreichend bewiesen ist. Doch spricht sehr für sie, dafs sie einer Erscheinung in dem geordneten, gewöhnlichen Lebensvorgange der Natur einen Platz anweiset, und sie durch eine unwidersprechliche Analogie begründet, die nach *Chladni's* kosmischer Hypothese nur als gesetzlos, den Weltenlauf störend, und als Satyre auf die Weisheit des Weltenschöpfers erscheint, mehrere ganz unbegründete Voraussetzungen nöthig macht, und demungeachtet um nichts deutlicher eingesehen wird.

Bedeutende Einwendungen gegen diese Ansicht, die noch nicht widerlegt sind, hat schon Prof. *Wrede*, *Gilbert*, 1803, Bd. II., vorgebracht. Eine umständliche Widerlegung derselben würde diese Blätter über die Gebühr vermehren, daher zum Schlusse nur einige der wichtigsten Gegenbemerkungen:

Der kosmische Ursprung dieser Massen besteht nach *Chladni* darin, dafs sie entweder *Urmaterie* oder *Trümmer* eines zerstörten *Planeten* seyn müfsten, allein beides ist mit einer philosophischen Naturansicht durchaus unverträglich.

Urmaterie ist schon für sich allein, noch mehr aber

als *vagina mundorum*, *Chladni*, S. 404, mit der Idee des Universums, als eines geordneten gesetzmäſsigen Ganzen, nicht übereinstimmend; sie führt den Begriff einer Unvollkommenheit, einer Ausbesserung entstandener Lücken mit sich. Beides können wir an dem kleinen Theile, den wir genauer kennen, nicht nachweisen, und daher auch für das Universum nicht annehmen. Und wie sollten wir uns diese vorstellen? — Doch immer nur als Individuum mit bestimmter Form, Mischung und Lebensthätigkeit, denn wir finden auch auf unserer Erde, die uns allein als Schema unserer Ansichten des Universums dienen kann, keinen Überschuſs ungeformter Stoffe, sondern nur Organismen, und keine Bildung eines neuen Organismus, auſser durch die von andern Organismen ausgeschiedenen Stoffe, und durch die bei ihrer Auflösung bleibenden Reste. Es werden also auch die Nebelflecke, die wir durch Teleskope nicht in Sterne auflösen können, von *Chladni* mit nicht gröſserem Rechte Urmaterie genannt, als wir unsere einfachen Körper Urstoffe nennen.

Wären die Meteormassen *Trümmer* eines zerstörten *Himmelskörpers*, so könnten sie nicht dieselbe Zusammensetzung wie unsere Erde haben; denn es bleibt ewig wahr, daſs Kraft und Materie derselbe ideale und reale Ausdruck eines Dinges sind, und daſs sich jede Verschiedenheit des einen durch eine eben so groſse Verschiedenheit des andern darstelle Die einzelnen Weltkörper, die durch ihre Entfernung von der Sonne und ihre Umlaufzeiten ihre weit verschiedenen Kraftäuſserungen so deutlich darlegen, können auch hinsichtlich ihrer Zusammensetzung keine Gleichheit unter einander zeigen. Es ist nicht zu läugnen, daſs die Materie immer aus denselben Grundstoffen bestehe, allein diese sind etwas anderes als unsere unzerlegten Körper, und es ist eine

rein willkürliche Voraussetzung, nicht nur letztere, sondern auch ihre binären Verbindungen in allen Weltkörpern gleich annehmen zu wollen. Wir haben keinen Beweis eines wirklich zersprungenen Planeten, und deren müſste doch eine groſse Menge seyn, wenn ihre Bruchstücke die zahllose Menge der Meteormassen bilden sollten. — Wir können auch an ihr Fallen nicht glauben, so lange die vier Planeten zwischen Mars und Jupiter, die mit einiger Wahrscheinlichkeit als Trümmer eines zerstörten gröſseren angesehen werden, in unwandelbaren Bahnen die Sonne umkreisen.

Würden sie ja fallen, so müſste dieſs gegen die Sonne, und nicht gegen die Erde geschehen, deren Anziehungskraft gegen sie in dem Maſse gröſser geworden wäre, als sie kleiner als der ganze Planet, dessen Theile sie waren, geworden sind. Wir können nicht läugnen, daſs einzelne Weltkörper zu seyn aufhören können, ob sie aber deſswegen in Stücke springen werden, oder sich nach und nach auflösen, wie die irdischen Körper, ist eine andere Frage. Ersteres wird ohne Grund dieser Hypothese zu Liebe angenommen, und die Kraft, die ihnen dadurch mitgetheilt wird, willkürlich gröſser angesetzt, als die Anziehungskraft der Sonne und ihre eigene Tangentialkraft, die es allein ist, die sie gegen die Erde treiben könnte; denn von einem Stoſse, den sie von auſsen erhalten sollten, haben wir keinen Begriff. Kämen sie aber auch zur Erde, so gesteht *Chladni* selbst zu, daſs die Bogensprünge, *caprae saltantes* (die aber nicht so häufig vorkommen, daſs es sich ihretwegen der Mühe lohnte, eine so wunderliche Hypothese zu ersinnen), dadurch entstehen, daſs die Masse von der Atmosphäre zurückprallt; dadurch wird nun ihre Kraft immer mehr geschwächt, und sie werden die Atmosphäre nicht erst mit geschwächter Kraft durchdrin-

gen, da sie es nicht gleich beim ersten Auffallen im Stande waren.

Das Hindernifs, die Atmosphäre zu durchdringen, scheint gerade an ihrer solaren Seite am gröfsten; denn so wie am terrestrischen Ende die Schwere am stärksten wirkt, und ihr Gegensatz, die Repulsion, in dem Verhältnisse wachsen mufs, als die Schwere in gröfserer Entfernung abnimmt, so ist sie auch an der solaren Grenze am stärksten, und die Schwere kann nicht dort stark genug wirken, solche Massen anzuziehen, wo eben die Repulsion stark genug angenommen wird, sie abspringen zu machen. *Chladni* sah sich zu dieser Hypothese gezwungen, weil er es für unmöglich hielt, dafs sich feste Körper in den oberen Regionen der Atmosphäre bilden, oder durch irgend eine Kraft so hoch getrieben werden können. Allein, wenn wir nur die unmerklichen Ausdünstungen der Körper als Stoff der Meteormassen ansehen, so läfst sich leicht abnehmen, dafs sie im äusserst fein vertheilten Zustande seyn müssen, und sich bedeutend heben können, ohne durch eine andere als die ihnen eigene expansive Kraft getrieben zu werden, wobei aber die unausgesetzte Strömung in der Atmosphäre, die wegen Verschiedenheit der Temperatur vom Äquator zu den Polen geht, zu ihrer Vertheilung gewifs bedeutend mitwirkt. Zudem ist ja von keinem blofsen Aufsteigen die Rede, sondern von einer gegenseitigen Einwirkung dieser Theile in der Atmosphäre, wodurch sie von dieser auf eine uns unbekannte Art, etwa so wie die Nahrungsmittel im organischen Körper, aufgenommen, durch ihre ganze Masse vertheilt, und, anders zusammengesetzt, wieder ausgeschieden werden. Es sind daher in allen Theilen der Atmosphäre feste Körper der Erde vorhanden, sie können überall ausgeschieden werden, ohne dafs die Luftmasse dadurch vermindert

wird, wie denn auch die Feuerkugeln in den verschiedensten Höhen beobachtet werden; und gerade die Erscheinungen der Feuerkugel sind denen ähnlich, die wir im Kleinen bemerken, wenn gasförmige Körper plötzlich zu festen zusammentreten, nämlich die Lichterscheinung, der Knall, das Freiwerden von Wärme.

II.

Beitrag zur Lehre von Kettenbrücken;

von

Johann Kuschelbauer in Grätz.

Mehrfach angestellte Berechnungen über Kettenbrücken, die ich nach den Angaben des französischen Ingenieurs, Herrn *Navier*, unternahm, machten mich auf den Abgang einer genauen Berechnungsart der Hängstangen für die wirkliche Bauführung aufmerksam, welchen auf folgende Art zu ergänzen mein Bestreben war.

Herr *Navier* hat nämlich in seiner Abhandlung von Kettenbrücken zur Berechnung der Ordinaten die Formel $y = \frac{f x^2}{h^2}$ hergeleitet, worin y die verticale Ordinate, x die horizontale Abscisse, h die halbe Spannweite, und f den Pfeil der Krümmung bedeutet. Dadurch wird für jede willkürlich angenommene Abscisse, von dem Scheitel der Krummen gerechnet, die Lage des entsprechenden Punctes in der Krummen bestimmt, und auf diese Art die Kettenlinie construirt, wobei jedoch die Entfernungen der bestimmten Puncte ungleich ausfallen werden. Beim Bau der Kettenbrücken besteht aber die Bedingung, daſs alle Glieder der Kette einander gleich seyn sollen, und dieses veranlaſst, daſs die Hängstangen

nicht gleich weit von einander stehen können, sondern von dem tiefsten Puncte der Kette gegen das obere Ende zu sich nach einem gewissen Gesetze immer mehr nähern.

Will man daher ein genaues Rechnungsresultat für die Ordinaten der gleich langen Kettenglieder und für die davon abzuleitende Länge der Hängstangen erhalten, so mufs man zuvor die horizontalen Abstände der letztern von dem tiefsten Puncte der Kette bei gleichen Entfernungen in der Krummen suchen, und diesen Werth statt x in obige Formel substituiren.

Nennt man s die halbe Länge der Kettenlinie, nämlich vom Scheitel bis zum Auflagspuncte, so ist nach *Navier's* Angabe

$$s = x + \frac{h^2}{2f}\left[\frac{1}{2.3}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^3 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^5 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^7 - \frac{5}{9.128}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^9 + \ldots\right] \quad \text{(I)}$$

Diese Gleichung kann zu jenem Zwecke dienen, indem man die Gröfse x durch s ausdrückt, und diefs kann nur durch die Umkehrung der Reihe geschehen. Man setze nämlich

$$\frac{2fx}{h^2} = \frac{2f}{h^2}(As + Bs^3 + Cs^5 + Ds^7 + Es^9 + Fs^{11} + \ldots) \quad \text{(II)}$$

und erhebe $\frac{2fx}{h^2}$ nach und nach auf die 3te, 5te, 7te, 9te, 11te, 13te und 15te Potenz.

Multiplicirt man die erhaltenen Potenzen mit den zugehörigen in der Gleichung (I) angeführten Coefficienten, und verbindet die neuen Werthe mit den Zeichen der letztern, so entsteht eine neue Gleichung für die Gröfse s, welche auf *Null* gebracht wird, indem man beiderseits s abzieht. Sodann müssen auch alle Glieder der Gleichung, welche eine gleiche Potenz von $\frac{2f}{h^2}$

zum gemeinschaftlichen Factor haben, $= 0$ seyn, und hieraus lassen sich die Coefficienten A, B, C, D, E, F u. s. w. bestimmen.

Substituirt man nun die so berechneten Werthe der Coefficienten A, B, C, D, E und F in die Gleichung (II), so erhält man

$$x = s - \frac{1}{6}\left(\frac{2f}{h^2}\right)^2 s^3 + \frac{13}{120}\left(\frac{2f}{h^2}\right)^4 s^5 - \frac{493}{5040}\left(\frac{2f}{h^2}\right)^6 s^7$$
$$+ \frac{37369}{362880}\left(\frac{2f}{h^2}\right)^8 s^9 - \frac{4732249}{39916800}\left(\frac{2f}{h^2}\right)^{10} s^{11} + \ldots =$$
$$= s - 0{,}166666\left(\frac{2f}{h^2}\right)^2 s^3 + 0{,}1083333\left(\frac{2f}{h^2}\right)^4 s^5$$
$$- 0{,}09781746\left(\frac{2f}{h^2}\right)^6 s^7 + 0{,}10297894\left(\frac{2f}{h^2}\right)^8 s^9$$
$$- 0{,}11855281\left(\frac{2f}{h^2}\right)^{10} s^{11} + \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Die weitere Fortsetzung dieser abnehmenden Reihe ist nicht nothwendig, weil die folgenden Glieder derselben wegen ihres geringen Werthes keine in der Ausführung merkbare Änderung für die Länge der Hängstangen herbeiführen, und die Rechnung nur erschweren würden.

Um eines Theils den bequemen Gebrauch derselben zu zeigen, andern Theils aber zu beweisen, daſs diese Formel bei anzustellenden Berechnungen keine gröſsere Genauigkeit zu wünschen übrig lasse, will ich jene Rechnung der Hängstangen anführen, die ich bei Gelegenheit des Entwurfes einer Kettenbrücke unternommen habe.

Dem Antrage gemäſs soll die Spannweite der Ketten oder die Entfernung ihrer Auflagspuncte 41° 3′ 6″, also die halbe Spannweite $h = 20° 4′ 9″ = 124{,}75$ Schuh, und der Pfeil f der Krümmung $\frac{1}{7}$ der halben Spannweite betragen. Die halbe Länge der Kettenlinie beträgt daher nach *Navier's* Formel $c = 21{,}07117964$ Klafter. Ferner

ist $\frac{f}{h} = \frac{1}{7}$, $\frac{2f}{h^2} = \frac{2f}{h.h} = \frac{2}{7 \cdot 124{,}75} = 0{,}0022902948$ und $\log. \frac{2f}{h^2} = 0{,}3598913 - 3$. Man drücke sich nun jedes Glied der obigen Formel logarithmisch aus, so wird

$$+ \log. s = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \log. s \text{ . (IV)}$$

$$- \log. 0{,}166666 \left(\frac{2f}{h^2}\right)^2 s^3 =$$

$$= - (0{,}2218488 - 1 + 2(0{,}3598913 - 3) + 3 \log. s)$$

$$= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - (0{,}9416314 - 7 + 3 \log. s) \text{ . (V)}$$

$$+ \log. 0{,}1083333 \left(\frac{2f}{h^2}\right)^4 s^5 =$$

$$= + (0{,}0347620 - 1 + 4(0{,}3598913 - 3) + 5 \log. s)$$

$$= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + (0{,}4743272 - 12 + 5 \log. s) \text{ . (VI)}$$

$$- \log. 0{,}09781746 \left(\frac{2f}{h^2}\right)^6 s^7 =$$

$$= - (0{,}9904163 - 2 + 6(0{,}3598913 - 3) + 7 \log. s)$$

$$= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - (0{,}1497641 - 17 + 7 \log. s) \text{ . (VII)}$$

$$+ \log. 0{,}10297894 \left(\frac{2f}{h^2}\right)^8 s^9 =$$

$$= + (0{,}0127484 - 1 + 8(0{,}3598913 - 3) + 9 \log. s)$$

$$= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + (0{,}8918788 - 23 + 9 \log. s) \text{ . (VIII)}$$

$$- \log. 0{,}11855281 \left(\frac{2f}{h^2}\right)^{10} s^{11} =$$

$$= - (0{,}0739118 - 1 + 10(0{,}3598913 - 3) + 11 \log. s)$$

$$= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - (0{,}6728248 - 28 + 11 \log. s) \text{ . (IX)}$$

In diese Ausdrücke substituire man die um gleich viel zunehmenden Längen der Kette. Da bei dem erwähnten Projecte auf jeder Seite der Brücke zwei Ketten einen Schuh weit über einander angetragen wurden, deren jede aus 8 Schuh langen Gliedern besteht, und die Glieder der einen Kette mit den Ösen der andern wechseln, so wird man die Länge s in unserer Rechnung immer um 4 Schnh zunehmen lassen müssen.

Gesetzt, man wollte für die untere Kette, bei welcher eine Öse in die Mitte der krummen Linie fällt, die Ordinate für den Vereinigungspunct des fünften und sechsten Kettengliedes erfahren, so wird für diesen Punct $s = 40$ gesetzt werden müssen. Es ist sodann:

(IV)	$= + 1{,}6020600$,	und die zugehörige Zahl		$= + 40{,}00000000$
(V)	$= - (0{,}7478114 - 2)$	»	»	$= - 0{,}05595145$
(VI)	$= + (0{,}4846272 - 4)$	»	»	$= + 0{,}00030523$
(VII)	$= - (0{,}3641841 - 7)$	»	»	$= - 0{,}00000023$
(VIII)	$= + (0{,}3104188 - 8)$	»	»	$= + 0{,}00000002$
(IX)	$= - (0{,}2954848 - 10)$	»	»	$= - 0{,}00000000$

Summirt man sowohl die positiven als auch die negativen Glieder für sich besonders. und zieht die Summe der letztern von der Summe der erstern ab, so gibt der Unterschied die Abscisse oder die Entfernung der Hängstange von dem Scheitel der krummen Linie, nämlich $x = 39{,}94435357$ Schuh.

Zur Berechnung der Ordinate wird man sich der vorerwähnten Formel $y = \frac{f x^2}{h^2}$ bedienen müssen, in welcher man statt x den obigen in Schuhen ausgedrückten Werth der Abscisse substituiren mufs. Zur bequemeren Rechnung drücke man sich die Formel logarithmisch aus, nämlich

$$\log. y = \log. \frac{f}{h^2} + 2 \log. x.$$

Nun ist $\frac{f}{h} = \frac{1}{7}$, also

$$\frac{f}{h^2} = \frac{1}{7 \cdot 124{,}75} = 0{,}001145 1474$$

$$\text{und} \quad \log. \frac{f}{h^2} = 0{,}0588613 - 3,$$

daher

$$\log. y = 0{,}0588613 - 3 + 2 \log. x.$$

Für $x = 39{,}94435357$ ist

$$\log. x = 1{,}6014554,$$

folglich

$$\log. y = 0{,}0588613 - 3 + 2 . 1{,}6014554 = 0{,}2617721$$

und $y = 1{,}827141$ Schuh $= 1' \; 9'' \; 11{,}1'''$.

Gibt man zu diesem Maſse noch diejenige Entfernung zu, um welche das untere Ende der Hängstangen von dem Scheitelpuncte der Krummen entfernt ist, welche hier 5′ 9″ beträgt, so gibt die Summe die ganze Länge der betreffenden Hängstange. Für die Hängstangen der obern Kette wird man aus der früher angeführten Ursache noch einen Schuh zugeben müssen.

Hat man auf diese Art alle Ordinaten und Abscissen berechnet, so wird es zweckmäſsig seyn, ihre Längen, so wie auch die daraus abgeleiteten Längen der Hängstangen in eine Tabelle von der hier ersichtlichen Form zusammen zu tragen. Die erste Rubrik derselben enthält die um vier Schuh wachsenden Längen der Kettenabtheilungen; die zweite Rubrik enthält die berechneten Abstände der Hängstangen von dem Scheitelpuncte der Krummen im Decimalmaſse von Schuhen ausgedrückt. Die dritte Rubrik faſst die berechneten Ordinaten, im Decimalmaſse von Schuhen ausgedrückt, in sich. In der vierten Rubrik ist die Länge der Hängstaugen im Werkmaſse ausgewiesen, und in der fünften Rubrik angezeigt, für welche der beiden Ketten die betreffenden Hängstangen berechnet wurden.

Länge der Kettenabtheilungen in Schuhen	Abscisse im Decimalmaſse von Schuhen.	Ordinate im Decimalmaſse von Schuhen.	Länge der Hängstangen im Werkmaſse.				Angabe, für welche Kette die berechnete Hängstange gilt.
			°	′	″	‴	Für die
0	—	—	0	5	9	0	untere Kette.
4	3,99994405	0,01832183	1	0	9	2,6	obere »
8	7,99955248	0,07328118	0	5	9	10,5	untere »
12	11,99849006	0,1648596	1	0	10	11,7	obere »
16	15,99642223	0,2930266	1	0	0	6,2	untere »
20	19,99301559	0,4577385	1	1	2	5,9	obere »
24	23,98793816	0,6589418	1	0	4	10,8	untere »
28	27,98085976	0,896568	1	1	7	9,1	obere »
32	31,97145238	1,170538	1	0	11	0,5	untere »
36	35,95939052	1,480764	1	2	2	9,2	obere »
40	39,94435357	1,827141	1	1	6	11,1	untere »
44	43,92601571	2,209555	1	2	11	6,1	obere »
48	47,90406723	2,627884	1	2	4	6,4	untere »
52	51,87819369	3,081986	1	3	9	11,8	obere »
56	55,84808683	3,571723	1	3	3	10,3	untere »
60	59,81344289	4,096933	1	4	10	1,9	obere »
64	63,77396264	4,657446	1	4	4	10,6	untere »
68	67,72936177	5,253095	2	0	0	0,4	obere »
72	71,67932095	5,883680	1	5	7	7,2	untere »
76	75,62358630	6,549013	2	1	3	7,0	obere »
80	79,56186976	7,24888	2	0	11	11,8	untere »
84	83,49389835	7,983089	2	2	8	9,5	obere »
88	87,41940571	8,751388	2	2	6	0,2	untere »
92	91,33813172	9,553567	2	4	3	7,7	obere »
96	95,24982172	10,38938	2	4	1	8,0	untere »
100	99,15422770	11,25858	3	0	0	1,2	obere »
104	103,05110903	12,16092	2	5	10	11,1	untere »
108	106,94022954	13,09616	3	1	10	1,8	obere »
112	110,82136404	14,06397	3	1	9	9,2	untere »
116	114,69428859	15,06415	3	3	9	9,2	obere »
120	118,55879050	16,0964	3	3	10	1,8	untere »
124	122,41466216	17,16043	—	—	—	—	—
126,427077	124,74999359	17,8214	—	—	—	—	—

Aus der letzten Querspalte ersieht man, daſs, wenn für s die halbe Länge der Kette substituirt wird, die Abscisse $x = 124{,}74999359$ Schuh oder 20,79166559 Klafter beträgt.

Dieser Werth unterscheidet sich von der halben Spannweite, die 124,75 Schuh oder 20,7916666 Klafter ausmacht, nur um 0,00000107 Klafter, oder um 0,011 eines Punctes, und liefert einen hinlänglichen Beweis von der Genauigkeit der Formel.

* * *

Hiemit glaube ich die zur Berechnung der Hängstangen nothwendigen Behelfe geliefert, und die Bedenklichkeiten jener Bauverständigen gehoben zu haben, welche gegen die sichere Anwendbarkeit der Ordinatenrechnung auf die Bestimmung der Hängstangen einiges Miſstrauen aus dem Grunde hegen, weil ihre mathematisch bestimmten Hängstangen beim Einhängen bald zu lang, bald zu kurz waren. Dieses Ereigniſs ist jedoch keineswegs der hierbei zum Grunde gelegten Rechnungsformel des Herrn *Navier*, sondern nur dem unrichtigen Gebrauche derselben zuzuschreiben; denn die erwähnte Ordinatenformel wird, wie leicht zu vermuthen steht, zur Bestimmung der Hängstangen gebraucht worden seyn, ohne früher berechnet zu haben, wie weit die Ordinaten von einander zu stehen kommen, wenn alle Kettenglieder einander gleich seyn sollen. Es konnte daher in diesem Falle nichts anderes übrig bleiben, als die Entfernungen der Hängstangen durchaus gleich, und zwar so groſs wie die Kettenglieder anzunehmen, und das Maſs dieser um gleich viel zunehmenden Abscissen in die Ordinatenformel zu substituiren. Hieraus ergaben sich Ordinaten, welche zwar zur Construction der Kettenlinie bei *ungleich* langen Kettengliedern dienen, jedoch für unsere Bauart, wobei die Glieder gleich groſs angenommen werden, nicht entsprechend sind; denn die Annahme gleich groſser Kettenglieder bringt es mit sich, daſs sich die Hängstangen, besonders in der Nähe

des Auflagspunctes, der Kette merkbar nähern, wodurch sich die diesen Puncten zukommenden Ordinaten in ihrer Länge bedeutend von jenen Ordinaten unterscheiden, welche bei gleich viel zunehmenden Abscissen Statt finden.

Erwägt man dieses genau, so wird kein Grund vorhanden seyn, die theoretischen Angaben zu verwerfen, und sich zur Bestimmung der Hängstangen bloſs mechanischer Hülfsmittel, z. B. einer nach einem verjüngten Maſsstabe verfertigten Drahtkette zu bedienen. Dieses Mittel dürfte sogar unzuverläſsig seyn, weil die Bearbeitung der einzelnen Bestandtheile einer solchen Drahtkette im Verhältnisse zu ihrem Gewichte und ihrem Umfange nicht dieselbe Genauigkeit hoffen läſst, wie die Bearbeitung der Glieder im Groſsen im Verhältnisse zum Gewichte und der Länge der ganzen Kette. Es wäre daher dieses Verfahren nur bei solchen Brücken räthlich, wo man durch ein Nothbehelf, wie z. B. durch am Ende der Hängstangen angebrachte Schrauben, jeder bemerkten Abweichung sogleich abhelfen, und hiedurch die horizontale Lage der Tragschienen bewerkstelligen kann. Bei Brücken jedoch, welche bedeutende Fuhrwerke zu tragen haben, wird man sich nicht auf die Tragkraft der Schraubengewinde verlassen können, sondern förmliche Bolzen oder Durchschübe zur Auflage der Tragschienen bestimmen müssen, und dieſs fordert, daſs die Längen der Hängstangen auf eine genauere Art, als es durch die verjüngte Kette geschehen kann, und zwar durch die im Vorigen gezeigte Rechnung, bestimmt werden.

Sollte man endlich die Theorie der Kettenlinie für die Berechnung der Kettenbrücken aus dem Grunde unanwendbar halten, weil die Ketten wegen ihren geraden Gliedern keine reine Krümmung bilden, und das Gewicht eines jeden Gliedes in dessen Länge nicht so gleich-

förmig vertheilt ist, wie das Gewicht eines durchaus gleich dicken Fadens in *seiner* Länge, so ist zu erwägen, daſs bei der genauen Bearbeitung der Glieder die Ösen gleich groſs, und die Stangen zwischen selben gleich dick hergestellt werden, und daſs sonach an jeder Öse das halbe Gewicht des ganzen Gliedes eben so herabdrücken muſs, als wenn die Schwere durch die ganze Länge gleichförmig vertheilt wäre. Es werden daher die Glieder der Kette durch ihr beiderseits gleichmäſsig vertheiltes Gewicht auf einander eben so, wie die unendlich klein angenommenen Theile eines durchaus gleich beschwerten Fadens vermög des ihnen zukommenden Gewichtes auf einander wirken; und so wie die Endpuncte dieser unendlich kleinen Theile die krumme Linie des Fadens bilden, so liegen auch die Ösen der Glieder in der Kettenlinie, wenn gleich die Glieder selbst gerade sind. Da nun die Länge der Hängstangen bloſs von der Lage der Ösen abhängt, so wird die Theorie der Kettenlinie in Hinsicht der Bestimmung der Hängstangen vollkommen hieher passen, und verdient ihre Anwendung am gehörigen Orte.

III.

Beitrag zur Theorie der Integration partieller Differenzialgleichungen höherer Ordnungen;

von

Joseph L. Raabe.

---

1) Bei der Integration einer partiellen Differenzialgleichung, welche die erste Ordnung übersteigt, hat man vorzüglich darauf zu sehen, ob die vorgelegte Differenzialgleichung ein Integrale von nächst niederer Ordnung zulasse; denn bekanntlich gibt es partielle Differenzialgleichungen, welche endliche Integralien zulassen, ohne daſs sie Integralien von erster, zweiter, etc. Ordnung haben.

Der Grund hiervon liegt in der Bildungsweise der partiellen Differenzialgleichungen aus ihren Integralien; denn wenn man sich aus einer partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variablen x, y, z und den partiellen Differenzialcoefficienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ durch zweimaliges Differenziren dieser Gleichung, ein Mal nach x, und das andere Mal nach y, eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung verschafft, so hat die dadurch erhaltene Gleichung bestimmt ein Integrale erster Ordnung, nämlich die vorgelegte Gleichung selbst; bildet man sich aber aus einer Gleichung zwischen x, y, z, die wir durch

$$z = f(x, y)$$

vorstellen, durch Verbindung derselben mit folgenden aus ihr durch partielles Differenziren nach x und nach y gefolgerten fünf Gleichungen:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df(x,y)}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{df(x,y)}{dy},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 f(x,y)}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2},$$

ebenfalls eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 z}{dy^2}$ enthalten soll, dann hat diese wohl ein endliches Integrale, nämlich die vorgelegte Gleichung selbst; man kann da aber nicht mit Gewiſsheit aussprechen, daſs sie auch ein Integrale erster Ordnung zulassen werde.

Eine ähnliche Betrachtung gilt auch von partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.

Ich will nun zur Angabe eines Verfahrens schreiten, mit Hülfe dessen man untersuchen kann, ob eine vorgelegte partielle Differenzialgleichung, welche die erste Ordnung übersteigt (denn nur solche bedürfen dieses Verfahrens), ein Integrale von nächst niederer Ordnung zulasse oder nicht.

2) Um mit dem einfachsten Falle den Anfang zu machen, wollen wir die erwähnte Untersuchung zuerst bei partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung anstellen, und dann auf die höheren Ordnungen übergehen.

Von diesen Gleichungen sollen auch jene, welche bloſs drei Variablen enthalten, vorangehen.

Man habe also die partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

in welcher der Kürze wegen p, q, r, s, t der Ordnung nach statt $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 z}{dy^2}$ gesetzt worden sind, zu behandeln.

Läſst diese Gleichung ein Integrale erster Ordnung

zu, so sey es

$$\omega(x, y, z, p, q) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo ω eine noch unbekannte Function vorstellt.

Die Gleichung (1) kann aus (2) nur dadurch entstanden seyn, daſs man letztere mit den zwei aus derselben durch partielles Differenziren ein Mal nach x, und ein Mal nach y gefolgerten Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dz}p + \frac{d\omega}{dp}r + \frac{d\omega}{dq}s = 0 \\ \frac{d\omega}{dy} + \frac{d\omega}{dz}q + \frac{d\omega}{dp}s + \frac{d\omega}{dq}t = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad (3)$$

wo der Kürze wegen ω statt $\omega(x, y, z, p, q)$ gesetzt worden ist, wie immer verbunden hat; es muſs daher auch umgekehrt die Gleichung (1) mit (2) identisch werden, wenn man aus den beiden letzten Gleichungen die Werthe je zweier der Gröſsen r, s, t sucht, und sie in (1) substituirt, welches unmittelbar aus dem Begriffe eines Integrals einer Differenzialgleichung folgt.

Sucht man nun wirklich aus den zwei letzten Gleichungen die Werthe zweier der erwähnten Gröſsen, z. B. von r und t, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} r = -\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dz}p + \frac{d\omega}{dq}s\right) : \frac{d\omega}{dp} \\ t = -\left(\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\omega}{dz}q + \frac{d\omega}{dp}s\right) : \frac{d\omega}{dq} \end{array}\right\} \quad . \quad (4)$$

Diese Werthe in die Gleichung (1) substituirt, geben nach dem Vorhergehenden die identische Gleichung:

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = \omega(x, y, z, p, q),$$

wo der Kürze wegen linker Hand des Gleichheitszeichens r und t statt ihrer Werthe beibehalten worden sind.

Man sieht aber, daſs in dem einen Gliede der letzten identisch seyn sollenden Gleichung die Gröſse s vorkommt, während sie in dem andern fehlt; mithin kann

die Identität nur dann Statt haben, wenn alle Glieder, die mit s behaftet sind, für sich verschwinden; oder mit andern Worten, dieser letztern Gleichung mufs, abgesehen von dem Werthe von s, Genüge gethan werden.

Man ordne daher die letzte Gleichung, nachdem für r, t die Werthe (4) substituirt worden sind, nach den verschiedenen Potenzen von s, und setze jeden der sich ergebenden Coefficienten dieser Potenzen gleich Null, so erhält man für jeden besonderen Fall eine gewisse Anzahl von Gleichungen, die von x, y, z, p, q, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d\omega}{dy}$, $\frac{d\omega}{dz}$, $\frac{d\omega}{dp}$, $\frac{d\omega}{dq}$ abhängen. Eine dieser Gleichungen, und zwar jene, die aus dem mit s nicht behafteten Gliede der geordneten Gleichung entsprungen ist, wird zwar ω enthalten, allein da vermöge (2) $\omega = 0$ ist, so lassen wir diese Gröfse überall, wo sie erscheint, weg.

Diese Gleichungen drücken die Bedingungen aus, welche Statt haben müssen, damit die vorgelegte Gleichung (1) ein Integrale erster Ordnung zulasse; und umgekehrt, wird man eine Function $\omega(x, y, z, p, q)$ finden können, die sämmtlichen Bedingungsgleichungen Genüge leistet, so wird man nicht nur von dem Vorhandenseyn eines Integrals erster Ordnung versichert seyn, sondern diese gefundene Function $\omega(x, y, z, p, q)$ gleich Null gesetzt, wird auch das Integrale erster Ordnung darstellen.

3) In den Fällen, wenn die vorgelegte partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung sämmtliche Differenzialcoefficienten zweiter Ordnung, nämlich r, s, t, enthält, ist es gleichgültig, welche zwei dieser Gröfsen man mit Hülfe der Gleichungen (3) aus der vorgelegten (1) eliminirt; fehlt aber in der letztern eine dieser Grössen, so wollen wir, je nachdem diefs bei einer oder der

andern dieser Gröſsen Statt findet, jeden Fall besonders betrachten.

a) Es fehle die Gröſse r, und man will untersuchen, ob die Gleichung

$$f(x, y, z, p, q, s, t) = o \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ein Integrale erster Ordnung hat.

Stellt man dieses Integrale durch die Gleichung (2) des vorigen Paragraphs vor, so kann zur Erzeugung derselben bloſs die zweite der Gleichungen (3) beigetragen haben. Man berechne daher aus derselben den Werth einer der Gröſsen s, t, und substituire ihn in die Gleichung (5), so muſs dadurch diese letzte Gleichung unabhängig von der noch übrigen Gröſse s oder t Statt haben; wird aber das Resultat der Substitution nach den verschiedenen Potenzen der noch übrig gebliebenen unbestimmten Gröſse geordnet, und jeder Coefficient einer dieser verschiedenen Potenzen für sich gleich Null gesetzt, so gelangt man zu den Bedingungsgleichungen, unter welchen die Gleichung (5) ein Integrale erster Ordnung hat.

b) Fehlt die Gröſse t, dann ist dasselbe Verfahren mit der ersten der Gleichungen (3) und der vorgelegten

$$f(x, y, z, p, q, r, s) = o \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

vorzunehmen.

c) Fehlt endlich in der vorgelegten Gleichung zweiter Ordnung die Gröſse s, so daſs sie von der Form

$$f(x, y, z, p, q, r, t) = o \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ist, dann muſs man beide Gleichungen (3) benützen, um zu untersuchen, ob erstere ein Integrale erster Ordnung besitzt. Am schnellsten wird man seinen Zweck erreichen, wenn man die Werthe von r und t aus den Gleiehungen (4) in dieselbe substituirt,

und dann s als die Gröſse, von der die resultirende Gleichung unabhängig ist, ansieht.

Falls die Gleichungen (5) und (6) Integralien erster Ordnung haben, kann man sie als gewöhnliche Differenzialgleichungen zwischen zwei Variablen betrachten; die erstere so, als ob z und y, und die letztere so, als ob z und x bei der Differenziation als variabel angesehen worden wären, während die Gleichung (7), obwohl s in derselben fehlt, aus ihrem Integrale nur durch die Annahme, daſs beide Gröſsen x und y, mithin auch z beim Differenziren variabel waren, entstanden seyn kann.

4) Auf eine ähnliche Weise wollen wir die partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zwischen vier Variablen betrachten.

Es sey die Gleichung

$$f\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{d^2 u}{dx\,dy}, \frac{d^2 u}{dx\,dz}, \frac{d^2 u}{dy^2}, \frac{d^2 u}{dy\,dz}, \frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0 \quad . \quad (8)$$

gegeben. Wenn dieselbe ein Integrale erster Ordnung hat, so sey es:

$$\omega\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right) = 0 \quad . \quad (9)$$

Die erstere Gleichung kann aus der letzteren nur dadurch entstanden seyn, daſs man letztere mit den drei aus ihr gefolgerten Differenzialien nach x, y, z:

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dx}} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dy}} \cdot \frac{d^2 u}{dx\,dy} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dz}} \cdot \frac{d^2 u}{dx\,dz} = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\omega}{du} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dx}} \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dy}} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dz}} \cdot \frac{d^2u}{dy\,dz} = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dz} + \frac{d\omega}{du} \cdot \frac{du}{dz} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dx}} \cdot \frac{d^2u}{dx\,dz} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dy}} \cdot \frac{d^2u}{dy\,dz} + \frac{d\omega}{d \cdot \frac{du}{dz}} \cdot \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

wie immer verbunden hat.

Wenn nun aus diesen Gleichungen je drei der sechs Gröfsen $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2u}{dx\,dz}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dy\,dz}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$ berechnet, und in die Gleichung (8) substituirt werden, so mufs diese mit (9) identisch seyn, welches aber nur dann angehen wird, wenn nach der Substitution die drei noch übrigen der eben erwähnten sechs Gröfsen, jede für sich, aus dem Resultate verschwinden.

Dadurch sind wir nun im Stande, die Bedingungsgleichungen herzustellen, die sämmtlich zugleich Statt haben müssen, damit die vorgelegte Gleichung (8) ein Integrale erster Ordnung gestatte.

Auf ähnliche Weise verfahre man, um die Bedingungsgleichungen zu erhalten, die Statt haben müssen, damit eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung von mehreren Variablen ein Integrale erster Ordnung zulasse.

Ähnliche Betrachtungen, wie im §. 3, lassen sich auch bei partiellen Differenzialgleichungen von vier und mehreren Variablen anstellen, die ich, um nicht zu weitläufig zu werden, übergehe.

5) Wenden wir uns zu den partiellen Differenzialgleichungen dreier Variablen dritter Ordnung.

Bei diesen sind drei Fälle möglich: erstens kann die vorgelegte Gleichung ein Integrale zweiter Ordnung haben; zweitens kann ein solches Integrale fehlen, während sie doch ein Integrale erster Ordnung hat; und drittens kann sie weder ein Integrale zweiter noch erster Ordnung, sondern bloſs ein endliches Integrale besitzen.

Den letztern Fall, der nicht in die gegenwärtige Untersuchung gehört, schlieſsen wir daher auch von allen Betrachtungen aus, und beschäftigen uns bloſs mit den beiden erstern Fällen.

6) Man habe es mit einer partiellen Differenzialgleichung dritter Ordnung von der Form

$$f\left(x, y, z, p, q, r, s, t, \frac{d^3 z}{dx^3}, \frac{d^3 z}{dx^2\, dy}, \frac{d^3 z}{dx\, dy^2}, \frac{d^3 z}{dy^3}\right) = 0 \quad . \quad (10)$$

zu thun, wo p, q, r, s, t die im §. 2 festgesetzten Bedeutungen haben.

Nehmen wir an, sie gestatte ein Integrale zweiter Ordnung, welches durch

$$\omega(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad . \quad . \quad (11)$$

vorgestellt werde, so muſs dieselbe aus der letztern Gleichung entstanden seyn, indem man diese mit ihren beiden partiellen Differenzialien nach x und y, nämlich mit

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dz} p + \frac{d\omega}{dp} r + \frac{d\omega}{dq} s \\ + \frac{d\omega}{dr} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{d\omega}{ds} \cdot \frac{d^3 z}{dx^2\, dy} + \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} = 0 \\ \frac{d\omega}{dy} + \frac{d\omega}{dz} q + \frac{d\omega}{dp} s + \frac{d\omega}{dq} t \\ + \frac{d\omega}{dr} \cdot \frac{d^3 z}{dx^2\, dy} + \frac{d\omega}{ds} \cdot \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} + \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dy^3} = 0 \end{array}\right\} (12)$$

wie immer verbunden hat.

Da bloſs diese Gleichungen dazu beigetragen haben, daſs aus der Gleichung (11) die Gleichung (10) entstanden ist, so muſs man auch umgekehrt, wenn die Gleichung (10) mit (12) verbunden wird, die Gleichung (11) erzeugen können. Nun kommen in der Gleichung (10) und in (12) Gröſsen vor, nämlich

$$\frac{d^3 z}{dx^3}, \frac{d^3 z}{dx^2\, dy}, \frac{d^3 z}{dx\, dy^2}, \frac{d^3 z}{dy^3},$$

die in der Gleichung (11) nicht enthalten sind, daher muſs die Resultirende, welche sich ergibt, wenn man aus (10) und (12) zwei dieser vier Gröſsen eliminirt, unabhängig von den beiden noch übrigen Gröſsen Statt finden können; man suche daher aus den beiden letzten Gleichungen zwei dieser vier Gröſsen, z. B. $\frac{d^3 z}{dx^3}$ und $\frac{d^3 z}{dy^3}$, substituire die gefundenen Ausdrücke in die vorgelegte Gleichung (10), ordne sie dann nach den verschiedenen Dimensionen von $\frac{d^3 z}{dx^2\, dy}$ und $\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}$, setze jeden der Coefficienten, welche mit einer jeden Potenz dieser Gröſsen einzeln oder als Factoren in Verbindung vorkommen, für sich gleich Null; so erhält man die Bedingungsgleichungen, die sämmtlich realisirt werden müssen, damit die vorgelegte partielle Differenzialgleichung dritter Ordnung ein Integrale zweiter Ordnung habe.

Kann man daher auch umgekehrt eine solche Function ω von x, y, z, p, q, r, s, t finden, die sämmtlichen, auf die eben beschriebene Weise gefundenen Bedingungsgleichungen Genüge thut, dann ist man nicht nur von der Existenz eines Integrals zweiter Ordnung versichert, sondern diese gefundene Function ω ist zugleich das in Rede stehende Integrale.

Die Betrachtungen, die in §. 3 bei vorgelegten partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnungen ange-

stellt worden sind, lassen sich auch bei den vorliegenden Differenzialgleichungen anstellen, aber aus dem in §. 4 angeführten Grunde unterlasse ich auch hier, sie aus einander zu setzen.

7) Hat aber eine partielle Differenzialgleichung dritter Ordnung kein Integrale zweiter Ordnung, wovon man sich nach dem in dem vorhergehenden Paragraphe, und aus dem in der Folge erst kommenden, überzeugen kann, so kann es noch bei den Integrationen solcher Gleichungen von grofsem Nutzen seyn, zu untersuchen, ob sie nicht etwa ein Integrale von erster Ordnung haben.

Obwohl dieser Fall schon viel mehr Schwierigkeiten unterworfen ist, wovon wir uns sogleich überzeugen werden, so kann er doch in vielen Fällen etwas Genaueres über die Natur einer solchen Differenzialgleichung anzeigen, wefswegen ich ihn nicht übergehen will.

Man habe also dieselbe Differenzialgleichung (10) dritter Ordnung des vorigen Paragraphs vor sich, und nehme an, ihr Integrale erster Ordnung sey

$$\omega(x, y, z, p, q) = 0 \quad . \; . \; . \quad (13)$$

so kann im gegenwärtigen Falle die vorgelegte Gleichung (10) nur aus Verbindung dieser letzten Gleichung mit folgenden aus derselben durch partielles Differenziren hervorgehenden fünf Gleichungen:

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dz} p + \frac{d\omega}{dp} r + \frac{d\omega}{dq} s = 0 \quad . \quad (14)$$

$$\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\omega}{dz} q + \frac{d\omega}{dp} s + \frac{d\omega}{dq} t = 0$$

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dz^2} p^2 + \frac{d^2\omega}{dp^2} r^2 + \frac{d^2\omega}{dq^2} s^2$$

$$+ 2\left[\frac{d^2\omega}{dx\,dz} p + \frac{d^2\omega}{dx\,dp} r + \frac{d^2\omega}{dx\,dq} s\right.$$

$$\left. + \frac{d^2\omega}{dz\,dp} pr + \frac{d^2\omega}{dz\,dq} ps + \frac{d^2\omega}{dp\,dq} rs\right]$$

$$+ \frac{d\omega}{dz} r + \frac{d\omega}{dp} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{d\omega}{dq} \cdot \frac{d^3 z}{dx\,dy^2} = 0$$

$$\frac{d^2\omega}{dx\,dy} + \frac{d^2\omega}{dx\,dz}\,q + \frac{d^2\omega}{dx\,dp}\,s + \frac{d^2\omega}{dx\,dq}\,t$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dy\,dz}\,p + \frac{d^2\omega}{dy\,dp}\,r + \frac{d^2\omega}{dy\,dq}\,s$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dz^2}\,pq + \frac{d^2\omega}{dp^2}\,rs + \frac{d^2\omega}{dq^2}\,ts$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dz\,dp}(rq + sp) + \frac{d^2\omega}{dz\,dq}(tp + sq) + \frac{d^2\omega}{dp\,dq}(rt - s^2)$$
$$+ \frac{d\omega}{dz}\,s + \frac{d\omega}{dp} \cdot \frac{d^3 z}{dx^2\,dy} + \frac{d\omega}{dq} \cdot \frac{d^3\omega}{dx\,dy^2} = 0$$

$$\frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{d^2\omega}{dz^2}\,q^2 + \frac{d^2\omega}{dp^2}\,s^2 + \frac{d^2\omega}{dq^2}\,t^2$$
$$+ 2\Big[\frac{d^2\omega}{dy\,dz}\,q + \frac{d^2\omega}{dy\,dp}\,s + \frac{d^2\omega}{dy\,dq}\,t$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dz\,dp}\,qs + \frac{d^2\omega}{dz\,dq}\,qt + \frac{d^2\omega}{dp\,dq}\,st\Big]$$
$$+ \frac{d\omega}{dz}\,t + \frac{d\omega}{dp} \cdot \frac{d^3 z}{dx\,dy^2} + \frac{d\omega}{dq} \cdot \frac{d^3 z}{dy^3} = 0$$

erhalten worden seyn.

Die zwei ersten dieser Gleichungen sind aus der von der ersten Ordnung durch partielles Differenziren ein Mal nach x, und ein Mal nach y, die drei letzten durch partielles Differenziren nach x und y der eben erhaltenen zwei Gleichungen entstanden.

8) Eine partielle Differenzialgleichung von beliebiger Ordnung kann *vollständig* genannt werden, wenn sie alle Differenzialquotienten, die zu dieser Ordnung gehören, enthält; z. B. eine partielle Differenzialgleichung dritter Ordnung ist vollständig, wenn in ihr die vier Differenzialquotienten $\frac{d^3 z}{dx^3}$, $\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}$, $\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}$, $\frac{d^3 z}{dy^3}$ wie immer verbunden vorkommen. Um daher aus einer partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung, wie die Gleichung (13), eine vollständige der dritten Ordnung, wie die Gleichung (10), zu erzeugen, ist ersichtlich,

daſs man hiezu entweder bloſs die dritte und fünfte der Gleichungen (14), oder diese Gleichungen und irgend eine oder zwei, oder alle drei der noch übrigen der Gleichungen (14) benützen kann. In allen diesen Fällen wird man eine vollständige partielle Differenzialgleichung dritter Ordnung erhalten, woraus nun das Beschwerliche der Untersuchung, ob eine solche Gleichung ein Integrale erster Ordnung zulasse, sich sogleich darthut. Denn eine kleine Überlegung zeigt, daſs mit Hülfe der Gleichungen (14) auf acht verschiedenen Wegen sich vollständige partielle Differenzialgleichungen dritter Ordnung erzeugen lassen, daher man auch umgekehrt, wenn eine vollständige partielle Differenzialgleichung dritter Ordnung gegeben ist, sich acht verschiedene Arten Bedingungsgleichungen verschaffen muſs, um etwas Bestimmtes über die Möglichkeit eines Integrals erster Ordnung aussprechen zu können.

Ferner sieht man, daſs die Bedingungsgleichungen, die man im vorliegenden Falle erhält, in Bezug auf ω von der zweiten Ordnung seyn werden (wodurch die Schwierigkeit der Integration wohl um eine Ordnung erniedrigt wird), dennoch aber auch nach dem in dieser Abhandlung angegebenen Verfahren, partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zu behandeln, sich nicht so leicht integriren lassen dürften. Denn die gegenwärtige Abhandlung beschäftiget sich, wie aus dem bisher Vorgetragenen bereits erhellet, bloſs mit der Integration solcher partieller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, die Integralien erster Ordnung zulassen; haben aber die in Rede stehenden Bedingungsgleichungen, welche, wie bereits erwähnt wurde, partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung sind, keine solche Integralien, so wird man mit diesem Verfahren nicht auslangen.

Ähnliche Betrachtungen über partielle Differenzialgleichungen höherer Ordnungen sind nun leicht auf dem bis jetzt eingeschlagenen Wege anzustellen; man wird sich auf demselben bald überzeugen, daſs der Gegenstand immer complicirter wird, je höher die Ordnung der zu untersuchenden partiellen Differenzialgleichung ist.

9) Wir wollen uns nun damit beschäftigen, wie man die gefundenen Bedingungsgleichungen nach den Paragraphen 2, 4, 5 benützen könne, um zu den Integralien der vorgelegten Gleichungen zu gelangen; und zwar wollen wir bloſs den Fall betrachten, in welchem es sich darum handelt, ob eine vorgelegte Differenzialgleichung ein Integrale von unmittelbar vorhergehender Ordnung besitze.

Soll eine partielle Differenzialgleichung beliebiger Ordnung ein Integrale von unmittelbar vorhergehender Ordnung haben, so müssen die Bedingungsgleichungen, die man sich nach §. 2, 4, 5 verschafft, nichts Absurdes aussagen, wie z. B. $a = 0$ wäre, wenn man von der Gröſse a weiſs, daſs sie von der Nulle verschieden ist.

Folgende Differenzialgleichung

$$r(1 + q^2) - t(1 + p^2) + 2s^2 = 0$$

gibt, wenn man für r und t die Werthe aus §. 2 (4) substituirt, die Gleichung

$$\frac{(1+p^2)\left(\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\omega}{dz}q\right)}{\frac{d\omega}{dp}} - \frac{(1+q^2)\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dz}p\right)}{\frac{d\omega}{dq}}$$

$$+ \left\{ \frac{(1+q^2)\frac{d\omega}{dp}}{\frac{d\omega}{dq}} - \frac{(1+p^2)\frac{d\omega}{dq}}{\frac{d\omega}{dp}} \right\} s + 2s^2 = 0.$$

Diese Gleichung soll unabhängig von dem Werthe

von s Statt haben, daher müssen die Gleichungen

$$\frac{(1+p^2)\left(\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\omega}{dz}q\right)}{\frac{d\omega}{dp}}-\frac{(1+q^2)\left(\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\omega}{dz}p\right)}{\frac{d\omega}{dq}}=0,$$

$$\frac{(1+q^2)\frac{d\omega}{dp}}{\frac{d\omega}{dq}}-\frac{(1+p^2)\frac{d\omega}{dq}}{\frac{d\omega}{dp}}=0,$$

$$z=0$$

bestehen können; die dritte dieser Gleichungen drückt aber etwas Absurdes aus, daher kann die in Rede stehende partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung kein Integrale erster Ordnung zulassen.

Ferner mufs man die erhaltenen Bedingungsgleichungen unter einander vergleichen, und sehen, ob nicht etwas Unmögliches durch das Zusammenbestehen dieser Gleichungen verlangt wird, wie wir es beim folgenden Beispiele zeigen wollen.

Man habe die Gleichung

$$r^3-2pqs^3+t^3=0.$$

Werden die bereits citirten Werthe von r und t in diese Gleichung substituirt, und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von s jeder für sich gleich Null gesetzt, so erhält man folgende Bedingungsgleichungen, die zugleich bestehen müssen:

$$\left(\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\omega}{dz}p\right)^3\left(\frac{d\omega}{dq}\right)^3+\left(\frac{d\omega}{dy}+\frac{d\omega}{dz}q\right)^3\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^3=0,$$

$$\left(\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\omega}{dz}p\right)^2\left(\frac{d\omega}{dq}\right)^4+\left(\frac{d\omega}{dy}+\frac{d\omega}{dz}q\right)^2\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^4=0,$$

$$\left(\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\omega}{dz}p\right)\left(\frac{d\omega}{dq}\right)^5+\left(\frac{d\omega}{dy}+\frac{d\omega}{dz}q\right)\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^5=0,$$

$$\left(\frac{d\omega}{dq}\right)^6+\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^6+2pq\left(\frac{d\omega}{dq}\right)^3\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^3=0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dz}\,p = u \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{dy} + \frac{d\omega}{dz}\,q = v,$$

so gibt die erste Gleichung

$$\frac{d\omega}{dq} : \frac{d\omega}{dp} = -\frac{v}{u},$$

die zweite

$$\frac{d\omega}{dq} : \frac{d\omega}{dp} = \left(\frac{hv}{u}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{wo } h = \sqrt{-1} \text{ ist},$$

und die dritte Gleichung

$$\frac{d\omega}{dq} : \frac{d\omega}{dp} = \left(-\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Aus der Vergleichung der beiden ersten Gleichungen folgt

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 = \frac{hv}{u} \quad \text{oder} \quad \frac{v}{u} = h,$$

und aus der Vergleichung der ersten und dritten folgt

$$\left(\frac{v}{u}\right)^5 = -\frac{v}{u}, \quad \left(\frac{v}{u}\right)^4 = -1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{v}{u}\right)^4 - h^2 = 0,$$

$$\text{also} \quad \left[\left(\frac{v}{u}\right)^2 + h\right]\left[\left(\frac{v}{u}\right)^2 - h\right] = 0;$$

hieraus entweder

$$\frac{v}{u} = \pm\sqrt{-h} \quad \text{oder} \quad \frac{v}{u} = \pm\sqrt{h}.$$

Man muſs also entweder

$$h = \pm\sqrt{-h} \quad \text{oder} \quad h = \pm\sqrt{h},$$

oder was dasselbe ist,

$$h^2 = -h \quad \text{oder} \quad h^2 = h,$$

nämlich

$$h = -1, \quad h = +1 \quad \text{oder} \quad h = 0$$

haben. Aber keiner dieser drei Fälle ist möglich, und man stoſst auf ähnliche Absurditäten, wenn aus der ersten der oben aufgestellten Bedingungsgleichungen für

$\frac{d\omega}{dq} : \frac{d\omega}{dp}$ der Werth $- \frac{v}{u}\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ genommen wird; die vorgelegte Gleichung hat demnach bestimmt kein Integrale erster Ordnung.

10) Enthalten nun die Bedingungsgleichungen keine dergleichen Absurditäten, so bleibt nichts übrig, als eine solche Function ω der Variablen x, y, z, p, q oder x, y, z, p, q, r, s, t, oder etc. aufzufinden, die in jedem Falle den Bedingungsgleichungen dieses Falles Genüge thut. Gelingt dieses, so ist die gefundene Function ω, gleich Null gesetzt, das Integrale der in Rede stehenden partiellen Differenzialgleichung, wenn nicht (d. h. gibt es keine dergleichen Function ω), so hat die vorgelegte Gleichung kein Integrale von unmittelbar vorhergehender oder von einer frühern Ordnung, sondern ihr Integrale ist ein endliches, über dessen Bestimmung wir bis jetzt noch nichts mitzutheilen wissen.

Es bleibt uns also zu zeigen übrig, wie man bei der Untersuchung, ob sämmtlichen Bedingungsgleichungen zugleich Genüge geschehen kann, zu Werke gehen mufs.

Wir wollen mit dem einfachsten Falle, nämlich mit den linearen partiellen Differenzialgleichungen dreier Variablen, d. h. mit jenen, welche blofs die ersten Dimensionen der zweiten partiellen Differenzialquotienten enthalten, den Anfang machen.

11) Man habe die lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$M + Nr + Ps + Qt = 0 \quad . \quad . \quad (15)$$

wo M, N, P, Q beliebige Functionen von x, y, z, p, q sind; es ist nun auszumitteln, unter welchen Umständen diese Gleichung ein Integrale erster Ordnung hat, und wenn sie ein solches hat, die Form desselben anzugeben.

Setzt man in diese Gleichung die Werthe für r und t aus den Gleichungen (4), so geht sie in folgende über:

$$M - \frac{N\left[\frac{d\omega}{dx} + p\frac{d\omega}{dz}\right]}{\frac{d\omega}{dp}} - \frac{Q\left[\frac{d\omega}{dy} + q\frac{d\omega}{dz}\right]}{\frac{d\omega}{dq}}$$

$$+ \left\{ P - \frac{N\frac{d\omega}{dq}}{\frac{d\omega}{dp}} - \frac{Q\frac{d\omega}{dp}}{\frac{d\omega}{dq}} \right\} s = 0.$$

Da dieser Gleichung unabhängig von s Genüge geschehen soll, so zerfällt sie in folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$M - N\frac{\left(\frac{d\omega}{dx} + p\frac{d\omega}{dz}\right)}{\frac{d\omega}{dp}} - Q\frac{\left(\frac{d\omega}{dy} + q\frac{d\omega}{dz}\right)}{\frac{d\omega}{dq}} = 0,$$

$$P - N\frac{\frac{d\omega}{dq}}{\frac{d\omega}{dp}} - Q\frac{\frac{d\omega}{dp}}{\frac{d\omega}{dq}} = 0,$$

welche beide zugleich Statt haben müssen, damit die Gleichung (15) ein Integrale erster Ordnung habe.

Diese Bedingungsgleichungen können noch um vieles vereinfacht werden. Aus der zweiten folgt nämlich, wenn man sie in Bezug auf $\frac{d\omega}{dq}$ auflöst:

$$\frac{d\omega}{dq} = \frac{d\omega}{dp}\left[\frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4NQ}}{2N}\right].$$

Bringt man diesen Werth von $\frac{d\omega}{dq}$ in die erstere der so eben gefundenen Bedingungsgleichungen, und setzt abkürzend

$$u = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4NQ}}{2N},$$

so erhält man folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$u N \frac{d\omega}{dx} + Q \frac{d\omega}{dy} + (qQ + upN) \frac{d\omega}{dz} - uM \frac{d\omega}{dp} = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dq} - u \frac{d\omega}{dp} = 0,$$

welche an die Stelle der beiden vorhergehenden treten.

Nun ist klar, dafs jeder Werth von ω, welcher diesen beiden Bedingungsgleichungen Genüge thut, auch der Summe und dem Unterschiede derselben Genüge thun mufs; und umgekehrt, ist ω dergestalt bestimmt, dafs dadurch der Summe und dem Unterschiede dieser beiden Gleichungen Genüge geschieht, so wird auch einer jeden einzelnen dieser beiden letzten Bedingungsgleichungen Genüge gethan, und die vorgelegte Gleichung hat in diesem Falle ein Integrale erster Ordnung.

Ist es aber nicht möglich, der Summe und dem Unterschiede der beiden letzten Bedingungsgleichungen durch eine und dieselbe Bestimmung von ω Genüge zu leisten, dann ist es auch unmöglich, den beiden aufgestellten Bedingungsgleichungen selbst zugleich zu genügen, und in diesem Falle hat die vorgelegte Gleichung (15) kein Integrale erster Ordnung.

Sieht man daher ω als eine von x, y, z, p, q abhängige Variable an, und nimmt sowohl die Summe als den Unterschied der beiden zuletzt erhaltenen Bedingungsgleichungen, so hat man folgende zwei lineare partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung zwischen den Variablen x, y, z, p, q, ω:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\omega}{dq} - u(1+M) \frac{d\omega}{dp} + (qQ + upN) \frac{d\omega}{dz} \\ &\qquad + Q \frac{d\omega}{dy} + uN \frac{d\omega}{dx} = 0 \\ &\frac{d\omega}{dq} - u(1-M) \frac{d\omega}{dp} - (qQ + upN) \frac{d\omega}{dz} \\ &\qquad - Q \frac{d\omega}{dy} - uN \frac{d\omega}{dx} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

deren Integralien nach den bekannten Regeln für eine jede einzelne zu suchen sind. Aus den Formen dieser Integralien ist nun zu entscheiden, ob es ein ω gibt, welches beiden Gleichungen entspricht.

Das allgemeine Integrale der ersten der Gleichungen (16) wird durch folgendes System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{array}{r} dp + u(1+M)\,dq = 0 \\ dz - (qQ + upN)\,dq = 0 \\ dy - Q\,dq = 0 \\ dx - uN\,dq = 0 \\ d\omega = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

Die vier ersten dieser Differenzialgleichungen enthalten die fünf Variablen x, y, z, p, q, folglich lassen sie sich immer integriren, indem man im ungünstigsten Falle auf eine gewöhnliche Differenzialgleichung zweier Variablen von der vierten Ordnung stofst.

Sieht man in diesen vier ersten Gleichungen zuerst dq, dann dp, dann dz, und nach der Ordnung dy, dx als constant an, und stellt man die vier erhaltenen Integralien für den ersten Fall durch

$$X_1 = a_1, \quad Y_1 = b_1, \quad Z_1 = c_1, \quad V_1 = d_1$$

vor, wo X_1, Y_1, Z_1, V_1 bekannte Functionen von x, y, z, p, q, und a_1, b_1, c_1, d_1 die willkürlichen Constanten der Integration sind; ferner die Integralien für den zweiten Fall, wenn dp constant gedacht wird, durch

$$X_2 = a_2, \quad Y_2 = b_2, \quad Z_2 = c_2, \quad V_2 = d_2;$$

dann die Integralien für den dritten Fall, wenn dz constant angenommen wird, durch

$$X_3 = a_3, \quad Y_3 = b_3, \quad Z_3 = c_3, \quad V_3 = d_3;$$

und die Integralien für den vierten Fall, wenn dy constant ist, durch

$$X_4 = a_4, \quad Y_4 = b_4, \quad Z_4 = c_4, \quad V_4 = d_4;$$

endlich die Integralien für den fünften Fall, wenn nämlich dx unveränderlich ist, durch

$$X_5 = a_5, \quad Y_5 = b_5, \quad Z_5 = c_5, \quad V_5 = d_5,$$

wo X_2, Y_2, Z_2, V_2, X_3, Y_3, . . . analoge Bedeutungen mit X_1, Y_1, Z_1, V_1 haben, und a_2, a_3, . . . b_2, b_3, . . . die willkürlichen Constanten dieser Integrationen sind, so werden unter den zwanzig Gröſsen X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2, . . . zehn unter einander verschieden seyn.

Stellt man nun je vier dieser zehn Gröſsen, die unter einander verschieden sind, durch X, Y, Z, V vor, so wird das allgemeinste Integrale der ersten der Gleichungen (16) folgendes

$$\omega = F(X, Y, Z, V) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

seyn, wo F irgend eine willkürliche Function vorstellt.

Eben so wird die zweite der Gleichungen (16) durch das System folgender gewöhnlicher Differenzialgleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} dp + u(1 - M)\,dq &= 0 \\ dz + (qQ + upN)\,dq &= 0 \\ dy + Q\,dq &= 0 \\ dx + uN\,dq &= 0 \\ d\omega &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19)$$

Behandelt man die vier ersten dieser Gleichungen auf dieselbe Weise, wie die vier ersten der Gleichungen (17), so wird man ebenfalls ein System von zwanzig Gröſsen erhalten, die wir des Unterschiedes willen durch

$${}^1X_1,\ {}^1Y_1,\ {}^1Z_1,\ {}^1V_1;\quad {}^1X_2,\ {}^1Y_2,\ {}^1Z_2,\ {}^1V_2;$$
$${}^1X_3,\ {}^1Y_3,\ {}^1Z_3,\ {}^1V_3;\quad {}^1X_4,\ {}^1Y_4,\ {}^1Z_4,\ {}^1V_4;$$
$${}^1X_5,\ {}^1Y_5,\ {}^1Z_5,\ {}^1V_5$$

vorstellen, die analoge Bedeutungen wie die vorigen haben, unter welchen zehn verschieden seyn werden, deren jede einer willkürlichen Constante gleich kommt; hebt man nun je vier verschiedene dieser zehn Gröfsen heraus, und bezeichnet sie dem Obigen analog durch ${}^1X$, ${}^1Y$, ${}^1Z$, ${}^1V$, so wird das allgemeinste Integrale der zweiten der Gleichungen (16) folgendes

$$\omega = f({}^1X, {}^1Y, {}^1Z, {}^1V) \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

seyn, wo f ebenfalls eine willkürliche Function vorstellt.

12) Bevor wir aus dem im vorigen §. Vorgetragenen etwas folgern, wollen wir die partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die aus folgender Gleichung erster Ordnung

$$F[\omega(x, y, z, p, q), \; \nu(x, y, z, p, q)] = 0 \quad . \quad (21)$$

entspringt, näher untersuchen, worin die Buchstaben ω und ν bekannte Functionen, und F eine willkürliche vorstellen.

Differenzirt man diese Gleichung ein Mal nach x, und das andere Mal nach y, und setzt abkürzend $\frac{dF}{d\omega}$, $\frac{dF}{d\nu}$ statt

$$\frac{d \, . \, F[\omega(x, y, z, p, q), \; \nu(x, y, z, p, q)]}{d\omega(x, y, z, p, q)},$$

$$\frac{d \, . \, F[\omega(x, y, z, p, q), \; \nu(x, y, z, p, q)]}{d\nu(x, y, z, p, q)},$$

und $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d\omega}{dy}$, etc. $\frac{d\nu}{dx}$, $\frac{d\nu}{dy}$, etc. statt

$$\frac{d \, . \, \omega(x, y, z, p, q)}{dx}, \; \frac{d \, . \, \omega(x, y, z, p, q)}{dy}, \text{ etc.}$$

$$\frac{d \, . \, \nu(x, y, z, p, q)}{dx}, \; \frac{d \, . \, \nu(x, y, z, p, q)}{dy}, \text{ etc.}$$

so erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{dF}{d\omega}\left[\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\omega}{dz}p+\frac{d\omega}{dp}r+\frac{d\omega}{dq}s\right]$$
$$+\frac{dF}{dv}\left[\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dz}p+\frac{dv}{dp}r+\frac{dv}{dq}s\right]=o,$$
$$\frac{dF}{d\omega}\left[\frac{d\omega}{dy}+\frac{d\omega}{dz}q+\frac{d\omega}{dp}s+\frac{d\omega}{dq}t\right]$$
$$+\frac{dF}{dv}\left[\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}q+\frac{dv}{dp}s+\frac{dv}{dq}t\right]=o.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen den Quotienten $\frac{dF}{d\omega}:\frac{dF}{dv}$, so erhält man folgende von der willkürlichen Function F befreite partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\omega}{dz}p+\frac{d\omega}{dp}r+\frac{d\omega}{dq}s}{\frac{d\omega}{dy}+\frac{d\omega}{dz}q+\frac{d\omega}{dp}s+\frac{d\omega}{dq}t}$$
$$-\frac{\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dz}p+\frac{dv}{dp}r+\frac{dv}{dq}s}{\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}q+\frac{dv}{dp}r+\frac{dv}{dq}t}=o,$$

deren allgemeines Integrale die vorgelegte Gleichung mit der willkürlichen Function F der beiden bekannten Functionen ω und v ist.

Diese letzte Gleichung nimmt nach gehöriger Reduction folgende Gestalt an:

$$M+Nr+Ps+Qt+R(rt-s^2)=o,$$

wo man hat

$$M=\frac{d\omega}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{d\omega}{dy}\frac{dv}{dx}+\left(\frac{d\omega}{dz}\frac{dv}{dy}-\frac{d\omega}{dy}\frac{dv}{dz}\right)p$$
$$+\left(\frac{d\omega}{dx}\frac{dv}{dz}-\frac{d\omega}{dz}\frac{dv}{dx}\right)q,$$

$$N=\frac{d\omega}{dp}\frac{dv}{dy}-\frac{d\omega}{dy}\frac{dv}{dp}+\left(\frac{d\omega}{dp}\frac{dv}{dz}-\frac{d\omega}{dz}\frac{dv}{dp}\right)q,$$

$$P = \frac{d\omega}{dx}\frac{dv}{dp} - \frac{d\omega}{dp}\frac{dv}{dx} + \frac{d\omega}{dq}\frac{dv}{dy} - \frac{d\omega}{dy}\frac{dv}{dq}$$
$$+ \left(\frac{d\omega}{dz}\frac{dv}{dp} - \frac{d\omega}{dp}\frac{dv}{dz}\right)p + \left(\frac{d\omega}{dq}\frac{dv}{dz} - \frac{d\omega}{dz}\frac{dv}{dq}\right)q,$$
$$Q = \frac{d\omega}{dx}\frac{dv}{dq} - \frac{d\omega}{dq}\frac{d\omega}{dx} + \left(\frac{d\omega}{dz}\frac{dv}{dq} - \frac{d\omega}{dq}\frac{dv}{dz}\right)p,$$
$$R = \frac{d\omega}{dp}\frac{dv}{dq} - \frac{d\omega}{dq}\frac{dv}{dp}.$$

Nimmt man nun $R = 0$ an, und substituirt den Werth von $\frac{dv}{dq}$, der aus dieser Gleichung folgt, in die dritte und vierte der letzten Gleichungen, so erhält man mit Berücksichtigung der zweiten Gleichung

$$\frac{Q\dfrac{d\omega}{dp}}{\dfrac{d\omega}{dq}} + \frac{N\dfrac{d\omega}{dq}}{\dfrac{d\omega}{dp}} - P = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{d\omega}{dq} = u\frac{d\omega}{dp},$$

wo abkürzend

$$u = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4NQ}}{2N}$$

gesetzt worden ist.

Sucht man aber aus derselben Gleichung $R = 0$ den Werth von $\frac{d\omega}{dq}$, und substituirt ihn ebenfalls in die dritte und vierte der obigen Gleichungen, so erhält man auf dieselbe Weise wie vorhin:

$$\frac{dv}{dq} = u\frac{d\omega}{dp}.$$

Substituirt man nun in die vier ersten der obigen Gleichungen für $\frac{d\omega}{dq}$, $\frac{dv}{dq}$ die so eben gefundenen Werthe, so gelangt man endlich zu folgender Gleichung:

$$uN\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d\omega}{dy}$$
$$+ (Qq + Npu)\frac{d\omega}{dz} - uM\frac{d\omega}{dp} = 0.$$

Diese Gleichung und die vorige, nämlich

$$\frac{d\omega}{dq} - u\frac{d\omega}{dp} = 0,$$

geben, wenn man sie addirt und subtrahirt, zwei Gleichungen, die mit den oben gefundenen Bedingungsgleichungen (16) identisch werden; man ist mithin zum Schlusse berechtiget, dafs man den beiden Gleichungen (16) am allgemeinsten durch eine Gleichung von der Form (21) Genüge thun kann, und das allgemeine Integrale der vorgelegten linearen partiellen Differenzialgleichung (15) wird von der Form

$$F(X, Y) = 0$$

seyn, wo X und Y Functionen von x, y, z, p, q seyn müssen, wo F irgend eine willkürliche Function vorstellt.

13) Gibt es nun unter dem Systeme der zehn verschiedenen Gröfsen X_1, Y_1, Z_1, V_1, etc. aus §. 11 zwei, die mit zweien aus dem Systeme der zehn Grössen ${}^1X_1$, ${}^1Y_1$, ${}^1Z_1$, ${}^1V_1$, etc. identisch sind, dann ist jede willkürliche Function dieser beiden Gröfsen, gleich Null gesetzt, das allgemeine Integrale der vorgelegten partiellen Differenzialgleichung (15), wenn nicht, so mufs man zu folgendem Verfahren seine Zuflucht nehmen: Man hebe je zwei der zehn verschiedenen Gröfsen X_1, Y_1, Z_1, V_1, etc. heraus, bringe sie unter eine willkürliche Function, und setze diese Function gleich Null; jede so erhaltene Gleichung wird bestimmt der ersten der Bedingungsgleichungen (16) Genüge thun, ob sie aber auch der zweiten der eben citirten Gleichungen entsprechen wird, hängt von dem Umstande ab, ob un-

ter den Gröfsen ${}^1X_1$, ${}^1Y_1$, ${}^1Z_1$, ${}^1V_1$, etc. sich solche vorfinden, die aus den Gröfsen X_1, Y_1, Z_1, V_1, etc. gefolgert werden können, oder ob aus den erstern Gröfsen, durch schickliche Verbindungen unter einander, sich solche neue Gröfsen ableiten lassen, die entweder mit den letztern identisch, oder aus ihnen gebildet werden können. Dieses im Voraus zu bestimmen, wird man in dem Falle, wenn die Gleichung (15) kein Integrale erster Ordnung hat, nie zu Stande bringen; allein die im vorigen §. gefundene Form des allgemeinen Integrals erster Ordnung einer linearen partiellen Differenzialgleichung dreier Variablen bietet uns Mittel dar, diese Schwierigkeit, wenn man die Mühe einer weitläufigen Operation nicht scheut, zu heben. Man untersuche nämlich, ob die früher erwähnte Gleichung mit der willkürlichen Function je zweier der Gröfsen X_1, Y_1, Z_1, V_1, etc. der zweiten der Gleichungen (16) Genüge thut; da die Anzahl dieser Gleichungen beschränkt, nämlich

$$= \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

ist, so wird man höchstens 45 Operationen vornehmen müssen, um zu entscheiden, ob beiden Gleichungen (16) durch eine und dieselbe willkürliche Function zweier bekannter Functionen von x, y, z, p, q Genüge geschehen kann. Ereignet es sich nun, dafs keine der erwähnten 45 Gleichungen der zweiten der Bedingungsgleichungen (16) Genüge thut, so ist dieses ein sicheres Merkmal, dafs die vorgelegte Gleichung (15) kein allgemeines Integrale erster Ordnung hat, und unsere Untersuchung einer solchen Gleichung ist hiemit als beschlossen anzusehen.

Statt zu untersuchen, ob eine dieser 45 Gleichungen der zweiten der Bedingungsgleichungen (16) Genüge thue oder nicht, kann man auch die Untersuchung

bei der Summe der beiden Bedingungsgleichungen (16), nämlich bei der Gleichung

$$\frac{d\omega}{dx} - u\frac{d\omega}{dp} = 0$$

anstellen, wodurch die Rechnung um vieles vereinfacht wird.

Es ist übrigens einleuchtend, dafs es gleichgültig seyn mufs, von welchem Systeme der zehn Gröfsen man sich die 45 Gleichungen verschafft, unter denen eine, wenn die Gleichung (15) eines allgemeinen Integrals erster Ordnung fähig seyn soll, der letzten Gleichung Genüge thun mufs.

Einige Beispiele werden das bisher Vorgetragene deutlicher machen.

14) Es sey gegeben die lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1 + pq + q^2) r + (q^2 - p^2) s - (1 + pq + p^2) t = 0.$$

Vergleicht man diesen besondern Fall mit dem allgemeineren (15), so hat man

$$M = 0, \quad N = 1 + pq + q^2, \quad P = q^2 - p^2,$$
$$Q = -(1 + pq + p^2),$$

folglich

$$u = \frac{q^2 - p^2 \pm \sqrt{(q^2 - p^2)^2 + 4(1 + pq + q^2)(1 + pq + p^2)}}{2(1 + pq + q^2)}.$$

Je nachdem nun das obere oder untere Zeichen beibehalten wird, hat man:

$$u = 1 \quad \text{oder} \quad u = -\frac{1 + pq + p^2}{1 + pq + q^2}.$$

Behält man nun den zweiten Werth von u, so gehen die gewöhnlichen Differenzialgleichungen (17) in folgende über:

$$dp - \frac{1 + pq + p^2}{1 + pq + q^2} dq = 0,$$

$$dz + (p + q)(1 + pq + p^2)\,dq = 0,$$
$$dy + (1 + pq + p^2)\,dq = 0,$$
$$dx + (1 + pq + p^2)\,dq = 0,$$
$$d\omega = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen wird am schnellsten integrirt, wenn man statt $p+q$ und $p-q$ zwei neue Variable einführt, in Bezug auf diese neuen Variablen die Integration ausführt, und dann die ersteren Variablen zurück substituirt; das gefundene Integrale ist dann

$$\frac{p-q}{\sqrt{z + (p+q)^2}} = a_1,$$

wo a_1 die Constante der Integration bedeutet.

Sucht man nun aus dieser Gleichung den Werth von p, und setzt ihn in die zweite, dritte und vierte der aufgestellten gewöhnlichen Differenzialgleichungen, so kann man dann eine jede einzelne für sich integriren. Substituirt man nun nach vollzogener Integration in die erhaltenen Integralgleichungen statt a den obigen Werth, so erhält man noch folgende drei Integralgleichungen:

$$z + \frac{(p+q)^2\,[4 + (3 + 2pq)(p+q)^2]}{8\,[2 + (p+q)^2]} = b_1,$$
$$y + \frac{(p+q)\,[3 + (2 + pq)\,(p+q)^2]}{3\,[2 + (p+q)^2]} = c_1,$$
$$x + \frac{(p+q)\,[3 + (2 + pq)\,(p+q)^2]}{3\,[2 + (p+q)^2]} = d_1,$$

wo b_1; c_1, d_1 ebenfalls Constanten der Integration bedeuten.

Nachdem wir vier der Gröſsen X_1, Y_1, Z_1, V_1, X_2, Y_2, etc. gefunden haben, wollen wir auch vier der Gröſsen ${}^1X_1$, ${}^1Y_1$, ${}^1Z_1$, ${}^1V_1$, ${}^1X_2$, ${}^1Y_2$, etc. uns zu verschaffen suchen.

Um diese letztern Gröſsen zu erhalten, müssen wir uns der Differenzialgleichungen (19) bedienen. Für den vorliegenden Fall gehen sie in folgende über:

$$dp - \frac{1 + pq + p^2}{1 + pq + q^2} dq = 0,$$
$$dz - (p + q)(1 + pq + p^2) dq = 0,$$
$$dy - (1 + pq + p^2) dq = 0,$$
$$dx - (1 + pq + p^2) dq = 0,$$
$$d\omega = 0.$$

Integrirt man die vier ersten dieser Gleichungen auf ähnliche Weise wie die vorigen, so erhält man folgende Integralien:

$$\frac{p - q}{\sqrt{2 + (p + q)^2}} = {}^1a_1,$$
$$z - \frac{(p + q)^2 [4 + (3 + 2pq)(p + q)^2]}{8 [2 + (p + q)^2]} = {}^1b_1,$$
$$y - \frac{(p + q) [3 + (2 + pq)(p + q)^2]}{3 [2 + (p + q)^2]} = {}^1c_1,$$
$$x - \frac{(p + q) [3 + (2 + pq)(p + q)^2]}{3 [2 + (p + q)^2]} = {}^1d_1,$$

wo ${}^1a_1$, ${}^1b_1$, ${}^1c_1$, ${}^1d_1$ ebenfalls die willkürlichen Constanten der Integration vorstellen.

Wir sehen nun, dafs beide Systeme der zehn Grössen bereits eine Gröfse gemeinschaftlich haben, nämlich

$$X_1 = {}^1X_1.$$

Um nun zu untersuchen, ob sich noch eine gemeinschaftliche Gröfse in beiden Systemen vorfindet, müssen wir, da uns aus jedem Systeme blofs vier Gröfsen bekannt sind, zu dem im §. 11 angegebenen Verfahren schreiten, um einige, oder, wenn es nöthig seyn wird, sämmtliche noch übrige Gröfsen kennen zu lernen.

Um zur Kenntnifs von vier neuen Gröfsen des ersten Systems der zehn Gröfsen zu gelangen, wollen wir die Differenzialgleichungen (17) folgender Mafsen stellen:

$$dy - dx = 0,$$
$$dz - (p + q) dx = 0,$$

$$dp + \frac{1}{1 + pq + q^2} \, dx = 0,$$

$$dq + \frac{1}{1 + pq + p^2} \, dx = 0.$$

Die erste dieser Differenzialgleichungen hat folgendes Integrale:

$$y - x = a_5,$$

wo a_5 die willkürliche Constante der Integration vorstellt.

Die Integralien der drei letzten Gleichungen sind, wie wir sogleich sehen werden, überflüssig, daher wir auch die Aufsuchung derselben unterlassen.

Um ferner zur Kenntniſs von vier neuen Gröſsen des zweiten Systems der zehn Gröſsen zu gelangen, wollen wir die Differenzialgleichungen (19) folgender Maſsen stellen:

$$dq - dx = 0,$$

$$dz - (p + q) \, dx = 0,$$

$$dp - \frac{1}{1 + pq + q^2} \, dx = 0,$$

$$dq - \frac{1}{1 + pq + p^2} \, dx = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen hat zum Integrale

$$y - x = {}^1a_5.$$

Da nun $a_5 = {}^1a_5$ ist, folglich

$$X_5 = {}^1X_5,$$

und wir oben gefunden haben

$$X_1 = {}^1X_1,$$

so haben beide Systeme der zehn Gröſsen zwei Gröſsen gemeinschaftlich, daher hat unsere vorgelegte lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung ein allgemeines Integrale erster Ordnung.

Dieses Integrale ist

$$F(X_1, X_5) = 0;$$

oder, wenn für X_1, X_5 ihre Werthe substituirt werden:

$$F\left(y - x,\ \frac{p-q}{\sqrt{2+(p+q)^2}}\right) = 0,$$

wo F irgend eine willkürliche Function vorstellt.

Sucht man nun die dieser Gleichung entsprechende partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung, so findet man die vorgelegte.

15) Für ein zweites Beispiel sey folgende lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung gegeben:

$$q(z+qy) + 2p(z+qy)r$$
$$+ [x(z+qy) - 2p(1+py)]s - x(1+py)t = 0.$$

Hier ist:

$$M = q(z+qy), \quad N = 2p(z+qy),$$
$$P = x(z+qy) - 2p(1+py), \quad Q = -x(1+py),$$

daher ist

$$u = \frac{x(z+qy) - 2p(1+py) \pm \sqrt{[x(z+qy) + 2p(1+py)]^2}}{4p(z+qy)}$$

Je nachdem man das obere oder untere Zeichen behält, ist

$$u = \frac{x}{2p} \quad \text{oder} \quad u = -\frac{1+py}{2+qy}.$$

Die Gleichungen (17) gehen daher, wenn man den ersten Werth von u behält, in folgende über:

$$dp + \frac{x}{2p}[1 + q(z+qy)]\,dq = 0,$$
$$dz - x(pz - q)\,dq = 0,$$
$$dy + x(1+py)\,dq = 0,$$
$$dx - x(z+qy)\,dq = 0,$$
$$d\omega = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $2p$, die vierte mit q, und addirt sie, so erhält man folgende Gleichung:

$$2p\,dp + q\,dx + x\,dq = 0.$$

Diese Gleichung integrirt, hat man

$$p^2 + qx = a,$$

wo a die Constante der Integration ist.

Multiplicirt man ferner die zweite Gleichung mit y, die dritte mit z, und addirt sie, so erhält man, wenn die vierte berücksichtiget wird:

$$ydz + zdy + dx = 0,$$

daher durch Integration:

$$yz + x = b,$$

wo b ebenfalls die Constante der Integration ist.

Die übrigen Integralien dieser Differenzialgleichungen berechne ich nicht, da die Differenzialgleichungen (19), wenn für u derselbe Werth angenommen wird, die beiden so eben gefundenen Integralien ebenfalls darbieten.

In der That sind die Differenzialgleichungen (19) für den vorliegenden Fall folgende:

$$dp + \frac{x}{2p}\left[1 - q(z + qy)\right] dq = 0,$$
$$dz + x(pz - q)\, dq = 0,$$
$$dy - x(1 + py)\, dq = 0,$$
$$dx + x(z + qy)\, dq = 0,$$
$$d\omega = 0.$$

Multiplicirt man hier ebenfalls die erste mit $2p$, die vierte mit q, und addirt sie, so hat man

$$2pdp + qdx + xdq = 0,$$

folglich durch Integration

$$p^2 + qx = c.$$

Wenn ferner die zweite dieser Differenzialgleichungen mit y, die dritte mit z multiplicirt wird, und dann die so erhaltenen zwei neuen Gleichungen zur letzten addirt werden, so erhält man

$$y\,dz + z\,dy + dx = 0,$$

daher integrirt

$$yz + x = d,$$

wo c und d die Constanten der Integrationen sind.

Es ist mithin das Integrale unserer vorgelegten partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$F[yz + x,\ p^2 + qx] = 0,$$

wo F eine willkürliche Function vorstellt.

Aus diesem Beispiele ersieht man, dafs es nicht immer absolut nothwendig sey, nach der in den Paragraphen 11 bis 13 gegebenen Vorschrift zu verfahren, um zu den Integralien solcher partieller Differenzialgleichungen, von denen in dieser Abhandlung die Rede ist, zu gelangen. In den meisten Fällen, in welchen die vorgelegten Differenzialgleichungen Integralien von unmittelbar vorhergehender Ordnung zulassen, wird man auf ähnliche Weise, wie im letzten Beispiele, durch schickliche Verbindungen der Hülfsdifferenzialgleichungen seinen Zweck erreichen; in den entgegengesetzten Fällen aber wird man seine Zuflucht zu den in den citirten Paragraphen gegebenen Vorschriften nehmen müssen.

16) Wir wollen nun dieselben Untersuchungen bei linearen partiellen Differenzialgleichungen dreier Variablen dritter Ordnung anstellen.

Es sey gegeben die partielle Differenzialgleichung

$$M + N\frac{d^3 z}{dx^3} + P\frac{d^3 z}{dx^2\,dy} + Q\frac{d^3 z}{dx\,dy^2} + R\frac{d^3 z}{dy^3} = 0 \quad . \ (22)$$

wo M, N, P, Q, R beliebige Functionen von x, y, z, p, q, r, s, t sind.

Soll nun diese Gleichung ein Integrale erster Ordnung haben, so mufs diese Gleichung, nachdem in derselben statt $\frac{d^3 z}{dx^3}$, $\frac{d^3 z}{dy^3}$ die Werthe aus den Gleichungen

(13) substituirt worden sind, unabhängig von $\frac{d^3 z}{dx^2\, dy}$, $\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}$ Statt haben können.

Substituirt man diese Werthe, so geht die vorgelegte Gleichung in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} M + P\dfrac{d^3 z}{dx^2\, dy} + Q\dfrac{d^3 z}{dx\, dy^2} \\ - \dfrac{N\left[\dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{d\omega}{dz}p + \dfrac{d\omega}{dp}r + \dfrac{d\omega}{dq}s + \dfrac{d\omega}{ds}\dfrac{d^3 z}{dx^2\, dy} + \dfrac{d\omega}{dt}\dfrac{d^3 z}{dx dy^2}\right]}{\dfrac{d\omega}{dr}} \\ - \dfrac{R\left[\dfrac{d\omega}{dy} + \dfrac{d\omega}{dz}q + \dfrac{d\omega}{dp}s + \dfrac{d\omega}{dq}t + \dfrac{d\omega}{ds}\dfrac{d^3 z}{dx dy^2} + \dfrac{d\omega}{dr}\dfrac{d^3 z}{dx^2 dy}\right]}{\dfrac{d\omega}{dt}} \end{array}\right\} = 0$$

Damit nun diese Gleichung unter der oben ausgesprochenen Bedingung Statt haben soll, müssen folgende drei Gleichungen zugleich Statt haben können:

$$M - \frac{N\left[\dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{d\omega}{dz}p + \dfrac{d\omega}{dp}r + \dfrac{d\omega}{dq}s\right]}{\dfrac{d\omega}{dr}} - \frac{R\left[\dfrac{d\omega}{dy} + \dfrac{d\omega}{dz}q + \dfrac{d\omega}{dp}s + \dfrac{d\omega}{dq}t\right]}{\dfrac{d\omega}{dt}} = 0,$$

$$-\frac{N\dfrac{d\omega}{ds}}{\dfrac{d\omega}{dr}} + P - \frac{R\dfrac{d\omega}{dr}}{\dfrac{d\omega}{dt}} = 0,$$

$$-\frac{N\dfrac{d\omega}{dt}}{\dfrac{d\omega}{dr}} + Q - \frac{R\dfrac{d\omega}{ds}}{\dfrac{d\omega}{dt}} = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind mit den zwei folgenden gleichbedeutend:

$$R\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 - P\frac{d\omega}{dr}\frac{d\omega}{dt} + N\frac{d\omega}{ds}\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$N\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - Q\frac{d\omega}{dr}\frac{d\omega}{dt} + R\frac{d\omega}{dr}\frac{d\omega}{ds} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen bald $\frac{d\omega}{dt}$ und bald $\frac{d\omega}{dr}$, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$(NR - PQ)\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^3 + (NQ + P^2)\frac{d\omega}{ds}\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 - 2NP\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2\frac{d\omega}{dr} + N^2\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^3 = 0,$$

$$(NR - PQ)\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 + (PR + Q^2)\frac{d\omega}{ds}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - 2QR\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2\frac{d\omega}{dt} + R^2\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^3 = 0.$$

Stellt nun u_1 eine der drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(NR - PQ)u^3 + (NQ + P^2)u^2 - 2NPu + N^2 = 0$$

vor, wenn u die Unbekannte der Gleichung ist; ferner v_1 eine der drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(NR - PQ)v^3 + (PR + Q^2)v^2 - 2QRv + R^2 = 0,$$

wenn v die Unbekannte dieser Gleichung ist, so hat man statt den zwei letzten Bedingungsgleichungen folgende mit ihnen identische:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega}{dr} - u_1\frac{d\omega}{ds} &= 0 \\ \frac{d\omega}{dt} - v_1\frac{d\omega}{ds} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (23)$$

Werden diese Werthe für $\frac{d\omega}{dr}$, $\frac{d\omega}{dt}$ in die erste der drei zuerst aufgestellten Bedingungsgleichungen substituirt, so geht sie nach allen Reductionen in fol-

gende über:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 v_1 M \frac{d\omega}{ds} - N v_1 \frac{d\omega}{dx} - R u_1 \frac{d\omega}{dy} - (N p v_1 + R q u_1) \frac{d\omega}{dz} \\ \quad - (N r v_1 + R s u_1) \frac{d\omega}{dp} - (N s v_1 + (R t u_1) \frac{d\omega}{dq} \end{array}\right\} = 0 \; (24)$$

Wenn daher die vorgelegte Gleichung (22) ein Integrale zweiter Ordnung haben soll, mufs es eine Function ω von x, y, z, p, q, r, s, t geben, die den drei gefundenen Bedingungsgleichungen (23) und (24) zugleich Genüge thut.

Gibt es nun ein solches ω, so wird dieses auch der Summe der drei Bedingungsgleichungen, d. h. dieses ω wird auch der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} N v_1 \frac{d\omega}{dx} + R u_1 \frac{d\omega}{dy} + (N p v_1 + R q u_1) \frac{d\omega}{dz} \\ + (N r v_1 + R s u_1) \frac{d\omega}{dp} + (N s v_1 + R t u_1) \frac{d\omega}{dq} \\ - (u_1 + v_1 + u_1 v_1 M) \frac{d\omega}{ds} + \frac{d\omega}{dr} + \frac{d\omega}{dt} \end{array}\right\} = 0 \; . \; (25)$$

Genüge leisten.

Diese Gleichung kann man als lineare partielle Differenzialgleichung erster Ordnung der neun Variablen $x, y, z, p, q, r, s, t, \omega$, worunter die acht ersten die absolut Variablen sind, ansehen, und als solche durch das System folgender gewöhnlicher Differenzialgleichungen integriren:

$$dy - \frac{R u_1}{N v_1} dx = 0,$$

$$dz - \frac{(N p v_1 + R q u_1)}{N v_1} dx = 0,$$

$$dp - \frac{(N r v_1 + R s u_1)}{N v_1} dx = 0,$$

$$dq - \frac{(N s v_1 + R t u_1)}{N v_1} dx = 0,$$

$$ds + \frac{(u_1 + v_1 + u_1 v_1 M)}{N v_1} dx = 0,$$

$$dr - \frac{1}{N\nu_1}\,dx = 0,$$

$$dt - \frac{1}{N\nu_1}\,dx = 0,$$

$$d\omega = 0.$$

Die sieben ersten dieser Gleichungen enthalten acht Variable, folglich ist es immer möglich, solche zu integriren. Stellt man die Integralien dieser sieben ersten Gleichungen durch

$T=a$, $U=b$, $V=c$, $W=d$, $X=e$, $Y=f$, $Z=g$

vor, wo die Theile rechts den Gleichheitszeichen Functionen von x, y, z, p, q, r, s, t, und die Theile links die Constanten der Integralien sind, so wird das Integrale der Gleichung (25) folgende Form haben:

$$\omega = F(T, U, V, W, X, Y, Z),$$

wo F eine willkürliche Function vorstellt.

Verfährt man auf dieselbe Weise wie im §. 11, so findet man, dafs die Zahl der Gröfsen T, U, V, W, etc., welche unter einander verschieden seyn werden,

$$= \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28$$

ausfällt.

17) Wir wollen nun auf einem ähnlichen Wege, wie im §. 12, die Form des allgemeinen Integrals der partiellen Differenzialgleichung (22) zu bestimmen suchen.

Man habe die zu diesem Behufe partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$F[\omega(x, y, z, p, q, r, s, t),\ \nu(x, y, z, p, q, r, s, t)] = 0,$$

wo F eine willkürliche Function der beiden einstweilen als bestimmt angenommenen Functionen ω, ν vorstellt.

Differenzirt man diese Gleichung partiell nach x und y, so wird man nach Wegschaffung des Quotienten

$\frac{dF}{d\omega} : \frac{dF}{dv}$ auf folgende partielle Differenzialgleichung stofsen:

$$\left.\begin{aligned} M + N \frac{d^3 z}{dx^3} + P \frac{d^3 z}{dx^2\, dy} + Q \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} + R \frac{d^3 z}{dy^3} \\ + S \left[\frac{d^3 z}{dx^3} \cdot \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} - \left(\frac{d^3 z}{dx^2\, dy}\right)^2\right] \\ + T \left[\frac{d^3 z}{dx^3} \cdot \frac{d^3 z}{dy^3} - \frac{d^3 z}{dx^2\, dy} \cdot \frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right] \\ + U \left[\frac{d^3 z}{dx^2\, dy} \cdot \frac{d^3 z}{dy^3} - \left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} = 0,$$

wobei die Werthe der Gröfsen M, N, P, Q, R, S, T, U leicht zu finden sind.

Soll aber die erhaltene partielle Differenzialgleichung dritter Ordnung linear seyn, so mufs man

$$S = 0, \quad T = 0, \quad U = 0$$

oder

$$\frac{d\omega}{dr} \frac{dv}{ds} - \frac{dv}{dr} \frac{d\omega}{ds} = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dr} \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dr} \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\omega}{ds} \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{ds} \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \text{haben.}$$

Da aber eine jede dieser Gleichungen eine Folge der beiden andern ist, so ist die Existenz zweier Gleichungen hinreichend, um den so eben ausgesprochenen Zweck zu erreichen.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\frac{d\omega}{dr}}{\frac{d\omega}{ds}} \frac{dv}{ds},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\frac{d\omega}{dr}} \frac{dv}{dr}.$$

Substituirt man diese Werthe in die oben angenommenen für N, P, R, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{N\frac{d\omega}{ds}}{\frac{d\omega}{dr}} - P + \frac{R\frac{d\omega}{dr}}{\frac{d\omega}{dt}} = 0.$$

Substituirt man ferner dieselben Gröfsen in die oben für N, Q, R angenommenen Werthe, so hat man:

$$\frac{N\frac{d\omega}{dt}}{\frac{d\omega}{dr}} - Q + \frac{R\frac{d\omega}{ds}}{\frac{d\omega}{dt}} = 0.$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man auch folgende Gleichungen:

$$\frac{N\frac{dv}{ds}}{\frac{dv}{dr}} - P + \frac{R\frac{dv}{dr}}{\frac{dv}{dt}} = 0,$$

$$\frac{N\frac{dv}{dt}}{\frac{dv}{dr}} - Q + \frac{R\frac{dv}{ds}}{\frac{dv}{dt}} = 0.$$

Aus den zwei erstern der vier letzten Gleichungen findet man:

$$\frac{d\omega}{dr} - u_1 \frac{d\omega}{ds} = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt} - v_1 \frac{d\omega}{ds} = 0,$$

und aus den zwei letztern derselben vier Gleichungen:

$$\frac{dv}{dr} - u_1 \frac{dv}{ds} = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} - v_1 \frac{dv}{ds} = 0,$$

wo u_1 eine der Wurzeln folgender kubischer Gleichung

$$(NR - PQ)u^3 + (NQ + P^2)u^2 - 2NPu + N^2 = 0,$$

in welcher u die Unbekannte vorstellt, und v_1 eine der Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(NR - PQ)v^3 + (PR + Q^2)v^2 - 2QRv + R^2 = 0$$

ist, in welcher v die Unbekannte ist.

Substituirt man nun die hier gefundenen Werthe für $\frac{d\omega}{dr}$, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dv}{dr}$, $\frac{dv}{dt}$ in die obigen Gleichungen, welche M, N, P, Q, R bestimmen, so gelangt man endlich zu folgender Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 v_1 M\frac{d\omega}{ds} - Nv_1\frac{d\omega}{dx} - Ru_1\frac{d\omega}{dy} - (Npv_1 + Rqu_1)\frac{d\omega}{dz} \\ \quad - (Nrv_1 + Rsu_1)\frac{d\omega}{dp} - (Nsv_1 + Rtu_1)\frac{d\omega}{dq} \end{array}\right\} = 0.$$

Aus der Identität dieser hier gefundenen Gleichungen mit den Bedingungsgleichungen, die Statt haben müssen, damit eine lineare partielle Differenzialgleichung dritter Ordnung ein Integrale der zweiten Ordnung habe, erhellet, daſs das allgemeine Integrale zweiter Ordnung einer linearen partiellen Differenzialgleichung dritter Ordnung eine willkürliche Function zweier bekannten Functionen der Gröſsen x, y, z, p, q, r, s, t seyn muſs. Hiemit ist man auch im Stande, durch ähnliche Betrachtungen, wie im § 13, über die Existenz eines allgemeinen Integrals der Gleichung (22) mit Bestimmtheit zu entscheiden.

18) Was die nicht linearen partiellen Differenzialgleichungen der zweiten oder einer höhern Ordnung betrifft, bedarf es hier keiner weiteren Erörterung, indem, wenn nach den bei linearen gegebenen Vorschriften verfahren wird, man ebenfalls auf Bedingungsgleichungen kommt, die von der ersten Ordnung, aber nicht mehr linear, sind. Von diesen Bedingungsglei-

chungen ist es hinreichend, eine einzige, die sämmtliche partielle Differenzialquotienten enthält, zu integriren, und wenn die vorgelegte nicht lineare partielle Differenzialgleichung höherer Ordnung ein Integrale von unmittelbar vorhergehender Ordnung haben soll, muſs irgend ein partikuläres Integrale der so eben integrirten Bedingungsgleichung allen übrigen Bedingungsgleichungen Genüge thun können; geht dieſs nicht an, so hat die in Rede stehende Gleichung kein Integrale von unmittelbar vorhergehender Ordnung.

Ganz dasselbe Verfahren, welches bei der Untersuchung der partiellen Differenzialgleichungen dreier Variablen angewendet worden ist, läſst sich auch auf partielle Differenzialgleichungen von vier oder mehreren Variablen ausdehnen.

IV.

Über einige karpathische Gebirgsseen im Zipser Comitat in Oberungarn;

von

Th. Mauksch.

Niemand hat sich noch die Mühe gegeben, alle Gebirgsseen an den Zipser Alpen aufzusuchen, und mit eigenen Namen zu belegen; ein Jeder, der das Gebirge, aus welcher Ursache immer, bereist, lernt nur diese kennen, die er auf seinem Wege gefunden hat, und bekümmert sich um die andern weit entlegenen so wenig, als der hier heimische Gebirgsmann um jene, die der erstere zu sehen Gelegenheit hatte. Schon aus diesem Grunde, ohne andere zu denken, kann ich es nicht über

mich nehmen, alle Seen aufzuzählen; es wird genug seyn, die von mir besuchten anzuzeigen, das Wissenswerthe dabei auszuheben, und mit einigen Bemerkungen zu begleiten. Die ihrer Gröfse nach gepriesenen liegen zum Theil auf der Nordseite der Alpen, und unter denen behauptet der *Fischsee* den ersten Rang; er hat seinen Namen von den Fischen, die sich hier nähren und vermehren, und soll beinahe eine Meile im Umfange haben; die anderen, z. B. der *Pflocksee*, der grofse *schwarze See* u. s. w., sind dagegen kleiner; weil ich aber diese Gegenden nicht kenne, so will ich das blofs Gehörte nicht nacherzählen, sondern mich gerade in die sogenannten Kupferschachte wenden, und die dortigen Seen angeben.

Einer derselben ist der *weifse See*. Er liegt unter dem südlichen Abhange des Sattels, und hat an seiner Ostseite den Turlsberg, und nach Westen einen sehr hohen, ausgedehnten Granitkolofs, der wegen der Nachbarschaft der *weifse Seethurm* heifst. Sein Wasser ist zwar klar, aber seine Ufer sind an einigen Stellen schlammig, an andern torfig, mit vielen Wassergewächsen besetzt, so dafs er das Ansehen eines Sumpfes von beiläufig 1500 Schritten im Umfange hat. Der gröfste Theil seines Wassers kommt ihm aus einem höhern See zu, welcher an der Seite des erstgedachten weifsen Seethurms liegt.

Die Umgebungen des erstgenannten Sees sind verschiedenartig: gegen Süden allein ist das Thal offen, und gewährt dem Wasser einen Abzug in das tiefere Thal; gegen Westen beginnt die granitöse Centralkette der Alpen, die schon hier Grausen erregt; gegen Norden ist das Land eben, von Wassergräben durchschnitten, wird aber hügelig, so wie es sich dem Scheitel-

puncte nähert; gegen Osten endlich steigt, wie ich schon gesagt habe, der Turlsberg auf.

Vom weifsen See führt der Weg von Norden gegen den grünen See hin. Wer diesen von hieraus besuchen will, kann über einen nicht steilen Abhang in einer Stunde da seyn.

Wenn man von Käsmark aus dahin gelangen will, kommt man durch das Dorf Vorwerk, und von da in zwei Stunden über Acker- und Weideland, und dann durch den Wald auf steinigem Boden zu einer kleinen Blöfse unter dem Razenberg. Hier ist man am Eingange des Thals auf einem ausgehauenen Wege, der sowohl für den Fufsgänger als Reiter sicher und bequem ist.

Der erste Berg, welcher da dem Reisenden vor Augen liegt, ist der sogenannte *Razenberg;* er lehnt sich von vorne her, und dann seitwärts dem weifsen Wasser folgend, in einer Länge von mehr als einer halben Meile gegen den grünen See hin an die Hundsdorfer Spitze an. Sein ausgedehnter Körper, aus Urgranit in Bänken geschichtet, ist unten bewaldet, weiter hinauf mit Krummholz überwachsen, an einigen Stellen zu ersteigen, an andern aber steil, wefshalb sein Graswuchs nie völlig abgeweidet werden kann, und da dieser jährlich vermodern mufs, so düngt er den Boden, und erzeugt jene feine, schwarze Erde, die man an den Abhängen der höchsten Berge zwischen Granitsteinen antrifft, ohne welche da alles öde und leer seyn würde. Vor Zeiten haben leichtgläubige Menschen, die überall Gold witterten, diesen Berg öfters besucht; jetzt aber wird er immer mehr vernachläfsigt, obgleich Einige an seinem südlichen Fufs reichhaltiges Bleierz gefunden haben wollen. Einmal habe ich ihn von der Fronte her bestiegen durch einen damals finstern Wald, wo ich eine Stunde mehr kriechen als gehen mufste, bis ich über die Waldregion in

ein offenes, gangbares Revier kam. Hier fand ich eine zwar magere, aber sonderbar gemischte Flor, ganz gemeine Wiesenkräuter in vertrauter Nachbarschaft mit solchen, die sonst nur auf kalten Alpenweiden blühen und gedeihen. Eine Grube von geringer Tiefe, die durch die Erdkrume bis zu dem unterliegenden Gestein ausgegraben worden ist, reizte meine Neugier; ich stieg hinab, und fand ein Lager Glimmerschiefer ohne alle fremde Beimischung über dem rings herum waltenden Granit ruhend.

Nun tritt das *Stöschen* in die Reihe der Berge. Es ist ein 4571 Fuſs über das Meer erhabener Berg, der zwischen dem Kalkgrund und der Schlucht, durch welche das weiſse Wasser abflieſst, seine isolirte Stelle einnimmt. Er ist rings herum mehr oder weniger bewaldet; sein etwas geneigter Gipfel und der gleichlaufende Rücken aber sind beide zu sehr der kalten Witterung ausgesetzt, als daſs da die hochstämmigen Bäume wachsen könnten. Der gröſste wüste Raum ist jetzt an der Südseite des Berges, die von Käsmark her gesehen werden kann; er ist vor einigen Jahren durch einen verheerenden Brand, der durch Unvorsichtigkeit eines Holzhauers verursacht worden ist, entstanden.

Einige reisende Naturforscher haben sich geäuſsert, daſs der ganze Berg aus heterogenen, unzusammenhängenden Materien vom Wasser aufgeführt worden sey. Sie wollten ihre Meinung auf den Augenschein gründen, denn sie sahen von dem ausgehauenen Wege an dem Razenberg jene Halden an der Westseite des Stöschens, die nichts als Schutt mit Felsentrümmern vermischt dem Beobachter darstellen, und unter dem Namen der *weissen Wand* bekannt sind. Ich werde von diesen Halden bald mehr zu sagen haben; für jetzt merke ich nur an,

dafs eben solche am Razenberg, der doch unstreitig zu dem Urgranit gezählt werden mufs, vorkommen.

Noch ist das kleine, ausgerundete Thal, in welchem der *grüne See* liegt, zu betrachten übrig, welches die erhabenste Alpenparthie in den Kupferschachten ist. Der Weg dahin geht am Abhange des Razenberges bis zum weifsen Wasser, über welches man auf einer elenden Brücke mit Vorsicht schreiten mufs, dann jenseits, längs dem Ufer, über Sand und grobes Gerölle. Eben hier ist der Winkel, aus welchem im Jahre 1813 das viele Gewässer hervorbrach, und sich in den Bach stürzte, wodurch die damalige Überschwemmung vergröfsert wurde; eine vom Wald und Rasen entblöfste Seite am Stöschen wird ein langwährendes Denkmal jener Katastrophe seyn, die so vielen Schaden in weit aus einander liegenden Provinzen verursacht hatte.

Der Kessel, worin der grüne See liegt, wird mit Recht gerühmt, er ist 4695 P. Fufs hoch. Das Ausgezeichnete ist das Kleinliche des Thals, im Gegensatz der erhabenen, Grausen erregenden Berge, die wie gewaltige Riesen in kühner Stellung dasselbe in einem halben Zirkel umgeben, und das Ansehen haben, als wenn sie durch die Festigkeit ihrer Massen zu seinem Schutz, oder durch ihre Sturz drohende Gipfel zur Ausfüllung desselben da stünden. Die im Umkreise stehenden Berge steigen im Südost gegen die Hunsdorfer, und weiter nach Süden gegen die Lomnitzer Spitze auf; in der Richtung nach Südwest aber, wo sie abfallen, ist von hieraus ein nicht nur beschwerlicher, sondern selbst gefährlicher Übergang in die kleine Kahlbach. Gerade nach Westen sind wieder spitzige und hohe Gipfel, die im Westen gegen Norden das hohe Thal von der Seite einschliefsen, wo der rothe See liegt. Die Schlufskette endlich von diesem mehr als Halbkreise macht der an

seinem Fuſse weit verbreitete weiſse Seethurm aus, der zwischen dem grünen und weiſsen See sich im Nordwesten erhebt.

Die herrschende Gebirgsart auf allen diesen Bergen ist der in der ganzen Centralkette vorkommende Urgranit; er ist in klafterdicken Bänken über einander gelagert. Diese fand ich am weiſsen Seethurm von Südwest nach Nordost unter einem Winkel von etwas mehr als 40° aufsteigend, und in eben der Lage und Richtung auf dem hintern Ratzenberg; dagegen sind die von der Nordseite her aufsteigenden Kämme gegen den weiſsen See abgestürzt, steigen folglich in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung auf.

Der Granit, von dem jetzt die Rede ist, ist im Ganzen und Groſsen grauweiſs und von mittelmäſsigem Korn; die seltenen Spielarten dieser Steinart aber sind hier beim grünen See die mit blutrothem Feldspath, mit rosenrothem Quarz und gröſsern Körnern, mit einem Überzug von Eisenocker, u. d. gl. Als etwas Besonderes, welches die Aufmerksamkeit der Geognosten erregen kann, muſs ich anzeigen, daſs man hier seit langer Zeit reiche Kupfererze gefunden hat, die, wenn sie in einem mehr zugängigen Orte vorkämen, lange ausgehauen worden wären. Sie machen, wie mich bewährte Augenzeugen versicherten, ein ausgedehntes Erzlager aus, welches bei den Bergleuten in Schmölnitz ein Rasenläufer heiſst, weil es offen am Tage auf Granit ruht. Die ersten Spuren davon finden sich am Fuſse der Käsmarker Spitze; sie sind aber von keiner Bedeutung, sondern erst in der Höhe, wo der Schnee nie ganz abgeht, ist das Erz reich und lohnend. Der Zugang dahin ist eine Schlucht an den Seiten hoher Spitzen, die man der Länge nach übersehen kann, bevor man zum grünen See gekommen ist. Dieses Erz ist ein Kupfer-

kies; das bessere, silberhältige soll ein Fahlerz seyn, wovon mir aber keine Stufe zu Gesicht gekommen ist. Wie hoch die Quantität zu schätzen sey, wuſste mir keiner von denen, die oben bei dem Erzlager waren, zu sagen, weil seine Schneedecke nie ganz abgeht; es sollen aber Spuren davon bis hinüber in die kleine Kahlbach streichen. Das Ganze dieses erzhältigen Gebirgstheils heiſst die *Kupferbank*, und von dieser vermuthlich das ganze untere Thal die *Kupferschächte*.

Nachdem wir die felsigen Umgebungen des *grünen Sees* beleuchtet haben, so wollen wir diesen selbst, und das Thal, in welchem er seine Stelle einnimmt, zur nähern Kenntniſs bringen.

Der *grüne See* nimmt im Hintergrunde die Mitte dieses ausgewirbelten Thals ein. Er wird von hohen, steil aufsteigenden Bergen bis zur Öffnung nach Nordosten ganz umgeben, daher kann die Sonne seine Oberfläche nur in den längsten Tagen bescheinen, und der Schnee bleibt in seiner Nähe länger als in andern Ausbiegungen der Kupferschächte liegen, obgleich seine Erhabenheit über das Meer 223 Par. Fuſs geringer ist, als die des weiſsen Sees. Den Namen hat er von der meergrünen Farbe erhalten, die an einigen Stellen des Grundes angenehm in die Augen fällt. Über die Ursache dieser Erscheinung haben verschiedene Beobachter und Schriftsteller verschieden geurtheilt *); ich halte es aber

---

*) Die Haupthypothesen haben *Johann von Asbóth*, *Bredetzky* und der Ritter von *Tobolds* vorgetragen. *Johann von Asbóth* leitet in seiner ausführlichen Beschreibung des grünen Sees in *Bredetzky's* topographischem Taschenbuche für Ungarn, 1802, die grüne Farbe von einer durch Vitriolsäure hervorgebrachten Kupferauflösung ab, und sucht den Grund dieser chemischen Operation der Natur in der unweit dem grünen See gelegenen Ku-

nicht der Mühe werth, die Meinungen zum Theil unwissender Menschen anzuführen, noch weniger auf die Nachkommen fortzupflanzen, da die Kundigen es von selbst errathen werden, dafs hier eben die Ursachen im Spiele sind, die dem Meerwasser die nämliche Farbe ertheilen. Gerade die grünen Stellen sind auch die tiefsten, und aus einer bestimmten Tiefe reflectirt das durchsichtige klare Wasser diese liebliche Farbe, die wir auch im Regenbogen wahrnehmen. Solche Stellen sind dem grünen See nicht allein eigen; ich fand sie auch in andern, selbst in dem Wasser der kleinen Kahlbach da, wo es ganz rein und hell in der gehörigen Tiefe zwi-

---

pferbank, über die sich ein Wasser in den See hinabstürzt, mit dem sich dann das eisenhältige Wasser aus dem rothen See vermischt, das sich ebenfalls in den grünen See ergiefst. Allein dieser Hypothese stehen viele wichtige physikalische Gründe entgegen, z. B. schon der Umstand, dafs das Wasser ganz rein, klar und geschmacklos ist, und, mit einem Glase geschöpft, dem Auge als ein gewöhnliches Quellwasser erscheint. *Asbóth* hat später seine irrige Hypothese selbst zurückgenommen. *Bredetzky*, der in einer Anmerkung den Ungrund der Hypothese *Asbóth's* rügte, wärmte dagegen eine andere, schon früher von *Buchholz* aufgestellte Hypothese auf, dafs nämlich die grüne Farbe von der Brunnenconferve *(Conferva fontinalis)*, von *Buchholz* Jungferhaar genannt, herrühre, die in den Tiefen der Seequelle wachsen; aber *Bredetzky* konnte diese Hypothese nicht befriedigend und gründlich als wahrscheinlich darstellen. Ritter von *Tobolds* (nicht der Maler *Stünder*, wie *Engel* irrig in der allgemeinen Litteraturzeitung behauptete) erklärte in der Zeitschrift von und für Ungarn von *Schediks*, 1804, die grüne Farbe für eine optische Täuschung, und sucht sie durch optische Deductionen mit vielem Glücke zu beweisen.

schen grofsen Felsenstücken im Laufe gehemmt eine Weile still stehen mufs *).

Merkwürdig ist es, dafs der in Hinsicht auf Gröfse so unbedeutende Alpensee gleichwohl einem ansehnlichen Bach den Ursprung gibt, der niemals versiegt. Dieser ist das sogenannte *weifse Wasser*, dessen gröfster Arm bei Käsmark in die Poper fällt.

Der dritte Alpensee in den Kupferschächten ist der *schwarze*, der im Gegensatze des im Norden der Alpen gelegenen grofsen schwarzen Sees, der *kleine* genannt wird.

Dieser See selbst ist fast eben so grofs als der benachbarte, vielgenannte grüne; er unterscheidet sich aber durch mehrere Eigenheiten, die ich nicht unangezeigt lassen kann. Seinen Namen hat er von dem schwarzen Grunde, so wie der grofse auf der Nordseite, und sein Wasser ist für das Auge klar, hat aber einen sumpfigen Geschmack, mehr als das des weifsen Sees, wovon die Ursache der Umstand ist, dafs es keinen schnellen Zu- oder Abflufs hat. Man sieht auf den dasigen steilen Höhen weder Schnee genug, noch die vielen anderswo vorkommenden Rinnsäle, die ihre Gegenwart durch Rauschen oder Plätschern verrathen. Man weifs auch nicht, auf welchem Wege die Wassermenge her-

---

*) Auch *Rumy* machte auf seinen Reisen aus der Zips nach Galizien und zurück (1805 — 1807) durch die Karpathenthäler an den Flüssen Poper, Dunajetz und verschiedenen Waldbächen dieselbe Beobachtung, und machte sie sowohl in der monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde vom Freiherrn *v. Zach* zu Gotha, als auch in den Annalen der österreichischen Litteratur bekannt. Dasselbe Phänomen beobachtete er später in der Donau bei Wien, Prefsburg und Gran, und in dem lauwarmen See bei Gran.

beigeführt und unterhalten werde, und fast eben so ist es mit dem Abflufs bewandt; man kann, so lange man da ist, nichts davon wahrnehmen, denn er ist mit Steinen überwölbt und vom Krummholz beschattet; erst wenn man auf dem Rückwege ist, kommt man zu einem nicht eben wasserreichen Graben, der seinen unterirdischen Ursprung auf diesem See hat. Sein Wasser ist dem zu Folge mehr stockend als fliefsend, daher macht es einen Bodensatz, der jenem einen sumpfigen Geschmack ertheilt, obgleich es so klar zu seyn scheint, als überall in den Seen und Bächen der Alpen.

Der letzte See ist der *rothe*, der seinen Namen von dem vielen Eisen, welches die Steine da geröthet hat, erhalten haben mag.

V.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. W ä r m e.

1. Über die Bestimmung hoher Temperaturen. Von *Prinsep*.

(Ann. de Chim. 41. 247.*)*

Die Wichtigkeit eines genauen Mittels zur Bestimmung hoher Temperaturen hat die Herausgeber dieser Zeitschrift bestimmt, im IV. Bande derselben des Vorschlagsprincipes eigens zu erwähnen, wodurch jene Bestimmung mit einer bisher wohl gewünschten, aber nicht erreichten Schärfe gemacht werden zu können schien, wiewohl dieser Vorschlag damals nur im Allgemeinen, keineswegs aber im Detail bekannt gemacht wurde, und derselbe Grund bewegt sie jetzt, da *Prinsep's* Arbeit

über diesen wichtigen Gegenstand ausführlich erschienen ist, sie in einem möglichst vollständigen Auszuge darzustellen.

Der Verfasser beginnt seine Arbeit mit Klagen über den Mangel genauer Versuche zur Bestimmung hoher Temperaturen, erwähnt der Mängel des *Wedgewood'*schen Pyrometers und des häufig gebrauchten pyrometrischen Mittels vieler Künstler, die einer hohen Temperatur bedürfen, welches in einer durch den Ofen gezogenen Metallstange besteht, die an einem Ende durch ihre Ausdehnung auf einen außerhalb des Ofens angebrachten Apparat wirkt, und dadurch wenigstens den Abstand der herrschenden Temperatur von einem festgesetzten Puncte angibt. *Prinsep* selbst versichert, sich längere Zeit hindurch bei der Münze in Benares einer solchen Stange bedient zu haben, die an einem Ende eine aus Gold und Silber nach dem Principe der Compensation zusammengesetzte Scale hatte, und führt eine merkwürdige dabei vorkommende Erscheinung an. Die Hitze, welcher diese Scale ausgesetzt seyn kann, konnte nie die Schmelzhitze des Bleies oder beiläufig 700° *F.* (296 $^7/_9$ *R.*) übersteigen, und doch verlor das Gold an der Oberfläche nach und nach seine Farbe, auch wurde es vom Silber durchdrungen. Diese Wirkung wurde zuerst an den Kanten der Stange bemerklich, erstreckte sich aber endlich über die ganze Oberfläche des Goldes, so daſs sie durch ein Mikroskop mit kleinen bleifarbigen Körnern besäet schien. Wo das Gold die gelbe Farbe nicht ganz verloren hatte, bekam es doch das Ansehen einer Legirung aus Gold und Silber. Diese Änderung erstreckte sich bis zu einer beträchtlichen Tiefe in die Goldmasse, und der Apparat verlor zusehends an Empfindlichkeit für die Wärme. Am befestigten Ende der Stange, wo ein Platinplättchen angebracht war, war

keine solche Farbenwandlung eingetreten, und es schien, als hätte das Platin die Einwirkung der Silberdämpfe auf das Gold verhindert. Beide Metalle waren vor ihrer Verwendung vollkommen rein, sie wurden ohne Zwischenmittel auf einander gelegt, und so weit erhitzt, bis das Silber zu schmelzen begann. Der so erhaltene Doppelstreifen wurde hierauf laminirt.

Prinsep meint, es könnte hier das Silber auf ähnliche Weise auf das Gold gewirkt haben, wie nach *Faraday's* Beobachtungen Quecksilber auf Gold selbst bei sehr geringen Temperaturen wirkt.

Nach dieser Episode geht *Prinsep* auf *Daniell's* Pyrometer über, und legt demselben die geringe Ausdehnung des Platins durch die Wärme, die schlechte Leitungsfähigkeit des Graphites, und die Wandelbarkeit seiner Form zur Last, und kommt endlich zur näheren Angabe der Thatsachen, die sich auf sein pyrometrisches Verfahren und auf die Vortheile desselben beziehen.

Bekanntlich sollen nach *Prinsep* hohe Temperaturen nach den Schmelzpuncten des Silbers, Goldes, Platins und mehrerer Legirungen derselben bestimmt werden. Da diese Temperaturen unveränderlich sind, so geben sie einen unverrückbaren, aller Orten gleichen pyrometrischen Maſsstab ab. Der ganze Apparat zur Bestimmung hoher Hitzgrade nimmt nur ein sehr kleines Volumen ein, indem jedes Probemetallstück nur die Gröſse eines Stecknadelkopfes zu haben braucht. Diese Stücke sind unzerstörbar, da sie im Feuer nicht oxydirt werden, und nach einem damit vorgenommenen Versuche nur wieder unter einem Hammer geplattet zu werden brauchen; endlich ist die Bezeichnung bei diesem Pyrometer sehr einfach, und kann aus zwei Buchstaben und den die Legirung bezeichnenden Decimalen bestehen. So z. B. kann die Temperatur, bei welcher eine Legi-

rung aus 0.7 Silber und 0.3 Gold schmilzt, mit A 0.3 O, jene, bei welcher eine Legirung aus 100 Gold und 23 Th. Platin schmilzt, mit O 0.23 P bezeichnet werden *).

Die Bereitung des reinen Silbers und Goldes, so wie der damit veranstalteten Legirungen, deren jede um 10 pCt. mehr Gold enthielt als die nächst vorhergehende, und die demnach die ersten zehn Glieder der Pyrometerscale abgeben, unterliegt keiner Schwierigkeit, und darum hält sich auch *Prinsep* nicht bei derselben auf. Schwieriger ist die Bereitung der Legirungen aus Gold und Platin, deren man 99 bedarf, wovon jede um 1 pCt. mehr Platin enthält als die nächst vorhergehende, und darum spricht *Prinsep* davon ausführlicher. Wir wollen ihm folgen:

Es wurden dazu ganz reine Metalle gewählt, und das Mischungsverhältniſs bis auf $^1/_{1000}$ genau ausgemittelt. Jedes Probestück bekam ein Gewicht von 15 Gran Troy-Gewicht. Die Metalle wurden in eine kleine, mit calcinirten Knochen gefüllte, in einem thönernen Schmelztiegel befindliche Capelle gelegt, und einem mächtigen Essenfeuer ausgesetzt. Dabei wurde der Luftzutritt möglichst verwehrt, und öfters das Metall in Papier gewickelt, um der Trennung der kleinen Theile vorzubeugen. Als die Probestücke aus dem Feuer kamen, hatten einige derselben bedeutend am Gewichte gewonnen, und diese waren unter dem Hammer spröde; andere hatten ihr ursprüngliches Gewicht beibehalten, wenige derselben hatten gar einen geringen Gewichtsverlust erlitten. Beide, besonders aber letztere, waren sehr hämmerbar; zugleich waren sie glänzender, und an der

---

*) Die Buchstaben O, P und A beziehen sich auf die französischen Namen des Goldes, Platins und Silbers. Statt dieser könnten wir die deutschen G, P und S wählen.

Oberfläche mit krystallinischen Zeichnungen versehen. Die Ursache der Gewichtszunahme einiger Stücke konnte der Verfasser nicht ergründen, er muthmaſset aber, sie dürfte von einer Oxygenaufnahme herrühren. Folgende Tafel enthält 29 so bereitete Legirungen aus Gold und Platin. Es ist in derselben nur der Goldgehalt angegeben, was an demselben von 100 abgeht, ist an Platin zugesetzt. Die Legirungen aus 60 und 70 pCt. Platin konnten im stärksten Essenfeuer nicht mehr geschmolzen werden, die aus 55 pCt. Platin bestehende war nur halb geschmolzen.

Zahl.	Gehalt an Gold.	Sp. Gewicht der Legirung.	Absolutes Gewicht der Legirung nach dem Schmelzen in Granen	Hämmerbarkeit.
0	100	19.36	1000	Vollkommen hämmerbar.
1	99	18.4	1001.4	Etwas brüchig.
2	98	19.0	1001	Detto.
3	97	19.0	1000	Detto.
4	96	19.8	1004	Nicht vollkommen geschmolzen.
5	95	19.1	1008.5	Brüchig.
6	94	18.6	1001	Detto.
7	93	18.7	1014.5	An den Kanten etwas spröde.
8	92	19.5	1000	Sehr spröde.
9	91	19.4	1000	Vollkommen hämmerbar.
10	90	18.7	1005	Detto.
11	89	19.0	1003	Spröde.
12	88	19.4	1000	Detto.
13	87	18.8	1013	Ganz hämmerbar.
14	86	18.6	1000	Sehr spröde.
15	85	20.0	1000	Hämmerbar.
16	84	19.1	1004	Vollkommen hämmerbar.
17	83	19.2	1003	An den Kanten spröde.
18	82	20.5	990?	Detto.
19	81	20.9	996	Vollkommen hämmerbar.
20	80	18.9	1000.2	Detto.

Zahl.	Gehalt an Gold.	Sp. Gewicht der Legirung.	Absolutes Gewicht der Legirung nach dem Schmelzen in Granen	Hämmerbarkeit.
21	75	20.9	992	Nicht ganz hämmerbar.
22	70	20.0	994	Detto.
23	65	19.9	990	Vollkommen hämmerbar.
24	60	19.0	1000.2	An den Kanten spröde.
25	55	18.9	1000.3	Detto.
26	50	20.0	1000	Etwas spröde.
27	45		1000.3	Spröde, aber nicht geflossen.
28	40		991	Nicht geflossen.
29	30		1000	Bloſs zusammengeschweiſst.

Die specifischen Gewichte konnten wegen der Kleinheit der Massen und einiger an denselben befindlicher Sprünge nicht genau gefunden werden. Sie sind bei den spröden Metallen geringer als bei den hämmerbaren.

Prinsep führt einige Beispiele an, welche die Empfindlichkeit seines Pyrometers zeigen, und geht dann zum wichtigsten Gegenstande seiner Abhandlung über, nämlich zur Bestimmung des Schmelzpunctes des Silbers und einiger seiner Pyrometerlegirungen nach Graden des Luftthermometers.

Zu diesem Behufe wurden in einem Ofen, worin man eine sehr hohe Temperatur hervorbringen konnte, kleine Schmelztiegel mit Silber und mit Legirungen aus Gold und Silber angebracht, und unter diesen auch ein aus reinem Gold bestehender Kolben, der nahe 10 Kubikzoll Luft faſste. An diesen Kolben war zuerst eine goldene, und auſserhalb des Ofens eine silberne, luftdicht schlieſsende Röhre angebracht, welche in ein Gefäſs führte, das gröſstentheils mit Olivenöhl gefüllt, unten mit einem Hahn zum Ablassen einer beliebigen Quanti-

tät desselben versehen war, seitwärts aber mit einer in gleiche Raumtheile getheilten, durch eine Öhlsäule gesperrten Glasröhre communicirte. Wenn die Temperatur des goldenen Kolbens erhöht wurde, dehnte sich die darin enthaltene Luft aus, es wurde ein Theil derselben in das Gefäſs mit Öhl getrieben, und man muſste durch den unteren Hahn des Apparates einen Theil Öhl herauslassen, um die Öhlsäule in der graduirten Glasröhre auf ihren ursprünglichen Stand zurückzuführen. Aus dieser Öhlquantität konnte man auf die Menge der aus dem Kolben vertriebenen Luft, und daraus auf die Temperatur des Kolbens einen Schluſs machen, wobei man aber das von *Gay-Lussac* und *Dalton* gefundene Ausdehnungsgesetz der Luft auf so hohe Temperaturen anwenden, aber auch die Ausdehnung des Goldes, die nur für Temperaturen innerhalb des Fundamentalabstandes durch wirkliche Versuche ausgemittelt ist, weit über diese Gränzen so annehmen muſs, wie sie sich aus jenen Versuchen ergibt. Es versteht sich wohl von selbst, daſs auf den bei jedem Versuch herrschenden Luftdruck und die Lufttemperatur, oder wenn diese sich während des Versuches änderten, auf das Mittel dieser Gröſsen, wie es sich aus der Beobachtung beim Beginn und beim Schluſs des Versuchs ergab, die gehörige Rücksicht genommen werden muſste. *Prinsep* führt eine sehr ausgedehnte Reihe solcher Versuche an, und berechnet für jede derselben den aus der Ausdehnung der Luft sich ergebenden Wärmegrad nach der *Fahrenheit*'schen Scale. Von diesen wollen wir nur jene aufnehmen, welche mit dem hier in Rede stehenden Pyrometer in Verbindung sind, d. h. welche dem Schmelzpuncte einiger der von *Prinsep* empfohlenen pyrometrischen Metalle entsprechen.

Zahl der Resultate.	Ofenhitze nach *Fahrenheit.*	Legirung, welche dabei schmolz.
1	1861	A
2	1718	A
3	2011	A 0.4 O
4	2198	A 0.2 O
5	1811	A
6	1670	A 0.1 O
7	1953	A 0.2 O (?)
8	1953	A 0.3 O
9	2018	A 0.2 O (?)
10	2024	A 0.2 O
11	1927	A 0.1 O (?)
12	1900	A 0.1 O (?)
13	1930	A 0.1 O
14	2045	A 0.3 O
15	2250	A 0.2 O
16	1800	A
17	1958	A 0.15 O
18	1874	A 0.1 O
19	1857	A
20	1958	A 0.2 O
21	2028	A 0.2 O
22	1966	A 0.1 O
23	1789	A
24	1807	A
25	2358	A
26	2765	A 0.4 O
27	2514	A 0.7 O
28	2427	A 0.2 O
29	2437	A 0.25 O

Aus diesen Versuchen erhält man folgende Mittelresultate:

Schmelzpunct des reinen Silbers 1830° *F.* = 999° *C.*
Silber mit 1/10 Gold 1920° *F.* = 1049° *C.*
Silber mit 1/4 Gold 2050° *F.* = 1127° *C.*

Die Rothglühhitze bestimmt *Prinsep* seinen Versuchen gemäfs mit 1200° *F.* = 649° *C.*, die Orangeglühhitze mit 1650° *F.* = 899° *C.* Man sieht hieraus, dafs diese Ergebnisse von den sonst als richtig angesehenen stark abweichen. So bestimmte z. B. *Wedgewood* den Schmelzpunct des Silbers mit 4717° *F.*, *Daniell* mit 2233° *F.*, also beide weit höher als *Prinsep.*

2. Bleibende Ausdehnung des Gufseisens nach öfterem Erhitzen. Von *Prinsep.*

(Journ. of sc. N. XX. p. 356.)

Prinsep bestimmte den Kubikgehalt einer Retorte aus Gufseisen vor dem Erhitzen, und als er sie ein Mal oder öfter einer starken Hitze ausgesetzt hatte, und überzeugte sich, dafs sie nach jeder Erhitzung gröfser ward, selbst nachdem sie ihre ursprüngliche Temperatur wieder angenommen hatte. Er bestimmte ihre Capacität durch das Gewicht von reinem Quecksilber, das sie bei 80° *F.* fafste. So fand er ihre Capacität

vor dem ersten Versuche	. . =	9.13	K. Zoll.
nach der ersten Erhitzung	. . =	9.64	»
» » dritten »	. . =	10.16	»

Merkwürdig ist es, dafs die Zunahme des Volumens gröfser ist als die Temperatur fordert, welcher das Eisen ausgesetzt war. Eisen dehnt sich innerhalb des Fundamentalabstandes, also für 100° *C.* um 0.0105 nach einer Dimension, oder um 0.0315 dem Volumen nach aus. Ein Volumen von 10 K. Z. soll demnach bei einer Tem-

peratur von 800° *F.* (welcher die Retorte ausgesetzt war) um 0.315 K. Z. zugenommen haben. Aber der wirkliche bleibende Zuwachs war gröfser, zum Beweise, dafs jene Ausdehnung des Eisens nicht so weit über den Fundamentalstand hinaus dem Gange der Wärme proportionirt sey.

3. Über einige ältere Versuche, die Abkühlungsdauer eines Körpers in verschiedenen Gasen betreffend. Von *Prevost.*

(Ann. de Ch. et de Phys. Tome 40, p. 332.)

Seit den Versuchen von *La Rive* und *Marcet* über die Capacität der Gase für die Wärme ist es besonders wichtig geworden, den eigentlichen Hergang der Sache bei Auskühlungsversuchen flüssiger Körper, oder fester Körper in flüssigen Mitteln, genau zu erforschen, weil man nur dadurch in den Stand gesetzt wird, die Schlüsse, welche diese berühmten Gelehrten aus ihren Versuchen zogen, richtig beurtheilen zu können. Bekanntlich hat schon *Dulong* (Bd. VI. S. 474 dieser Zeitschrift) diesen Gegenstand gründlich erwogen; aber es dürfte darum doch nicht überflüssig seyn, das anzuführen, was *Prevost* von älteren Versuchen, die diesen Gegenstand betreffen, sagt. Er führt die von *Achard* schon im Jahre 1783 bekannt gemachten Versuche an, bei denen man die Kugel eines Quecksilberthermometers in verschiedenen Gasen abkühlen liefs. Er fand im Wasserstoffgas eine Abkühlung

von	70° *R.*	—	60°	in	15	Secunden,
»	60° »	—	50°	»	20	»
»	50° »	—	40°	»	28	»
»	40° »	—	30°	»	50	»
»	30° »	—	20°	»	128	

im Kohlensäuregas

von 70° *R.*	— 60°	in 30	Secunden.
» 60° »	— 50°	» 37	»
» 50° »	— 40°	» 53	»
» 40° »	— 30°	» 92	»
» 30° »	— 20°	» 250	»

Die übrigen Gase, wie z. B. Sauerstoffgas, Stickgas, atmosphärische Luft, gaben Abkühlungsgeschwindigkeiten, welche zwischen den erwähnten, aber nahe an der des Kohlensäuregases lagen, so daſs man annehmen kann, in allen Gasen kühle ein Körper gleich schnell ab, mit Ausnahme des Hydrogengases, worin die Abkühlung viel schneller erfolgt. In folgenden Puncten kommen demnach diese älteren Versuche mit den neuesten überein:

1. Beide beweisen ein gleiches Verhalten der Gase in Betreff der Abkühlung, die sie an einem Körper unter denselben Umständen hervorbringen.
2. Beide zeigen, daſs das Hydrogengas eine Ausnahme mache, und die schnellste Abkühlung bewirke.

Die neuesten Beobachter, setzt *Prevost* hinzu, haben dieses verschiedene Verhalten im Wasserstoffgase einer gröſseren Leitungsfähigkeit zugeschrieben. Man kann in der That annehmen, daſs die Mollecüle des so leichten Wasserstoffgases sehr weit von einander abstehen, und dem Wärmestoffe einen leichteren Durchgang verschaffen als die übrigen Gase.

Wer diesen *Prevost*'schen Aufsatz mit der herrlichen, oben erwähnten Arbeit *Dulong's* vergleicht, wird leicht gewahr werden, worin sich die Ansichten beider von einander unterscheiden. Ersterer sieht die schnellere Abkühlung eines Körpers im Wasserstoffgas als den

Erfolg einer gröfseren Leitungsfähigkeit an; letzterer glaubt, und wie mir scheint, mit vollem Rechte, der Begriff der Leitungsfähigkeit lasse sich auf flüssige Körper, deren Theile durch die geringste Ungleichheit ihrer Dichte zu einer Bewegung nach aufwärts oder abwärts bestimmt werden können, nicht anwenden, und man kann das schnellere Abkühlen eines Körpers im Wasserstoffgase nur als das Resultat der gröfseren Beweglichkeit der Theile dieses Gases ansehen.

4. Über die Temperatur im Innern der Erde. Von *Henwood*.

(Journ. of sc. N. XX. p. 234.)

Henwood sammelte mehrere in Bergwerkschachten angestellte Temperaturbeobachtungen. Sie wurden im Grubenwasser selbst unmittelbar bei seinem Austritte aus dem Gestein, woher es kam, oder in einer geringen Entfernung davon angestellt. Folgende Tabelle enthält sie. Die Tiefe der Beobachtungsstelle ist in Fathoms angegeben, man kann sie leicht in Wiener Mafs darstellen, wenn man weifs, dafs ein Fathom nahe 5.6 W. F. gibt. Die Temperatur gibt *Henwood* nach der *Fahrenheit*'schen Scale an; dem Namen des Schachtes, worauf sich die Beobachtung bezieht, ist ein G oder S beigesetzt, je nachdem das Gestein Granit oder Glimmerschiefer ist.

Beobachtungsort.	Tiefe in Fathoms.	Temperatur nach *Fahrenheit.*	Name des Beobachters.
Well zu Southwark	23	54°	*Fox.*
South Towan, S .	45	60	do.
Wellington, S . .	50	57	do.
detto. . . .	50	58	do.
Oatfield, S . . .	70	56	*Moyle.*
Liscombe	82	64	*Fox.*
Unity Wood . . .	86	64	do.
H. Trumpet, G . .	86	53	*Moyle.*
Botallack, G . . .	115	72	*Barham.*
Ting Tang, S . .	117	65	*Fox.*
Beer Alston . . .	120	66.5	do.
Trumpet, G . . .	128	65	*Moyle.*
Chacewater, S . .	128	68	*Fox.*
detto. . . .	128	75	do.
H. Vor	131	70	*Forbes.*
Poldice	144	78	*Fox.*
detto.	144	80	do.
Consolidated . . .	150	76	do.
detto.	150	80	do.
H. Alfred	155	67	do.
detto.	155	70	do.
H. Friendship . .	170	64.5	do.
United Mines . .	170	87	do.
detto. . . .	180	87.5	do.
Stray Park . . .	200	72	do.
detto.	200	74	do.
Oatfield, S . . .	236	82	*Moyle.*
detto.	236	86.5	do.
Dolcoath, G . .	240	80	*Fox.*
detto.	240	82	do.

Nach einer Beobachtung von *Fox* und Anderen ist nicht bloſs das in groſsen Tiefen hervorbrechende Wasser wärmer als die Luft oder das Wasser höher liegender Stellen, sondern es ist selbst das Wasser in derselben Tiefe wärmer als die Luft daselbst. Zum Beweise werden folgende Resultate angeführt:

Beobachtungsort.	Tiefe in Fathoms.	Temperatur nach F. der Luft.	des Wassers	Beobachter.
Little Bound .	26	54°	54°	*Forbes.*
detto. . .	35	57	55	do.
H. Vor . . .	über 40	57	57	*Barham.*
Little Bound .	50	57	59	*Forbes.*
Wellington . .	50	58.5	{57 58	*Fox.*
Botallack . .	83	67	68	*Forbes.*
Ding-dong . .	108	64	64	do.
Chacewater .	128	76	75	*Fox.*
detto. . .	128	74!	68	do.
H. Vor . . .	140	66	66	*Forbes.*
H. Abraham .	140	70.5	73.5	*Fox.*
detto. . .	200	78	78.5	do.
Stray Park . .	200	71	{72 74	do.
Dolcoath . .	240	80	{80 82	do.

Bekanntlich ist die Temperatur jener Theile eines Schachtes, wo sich Menschen aufhalten, und keine freie Circulation der Luft Statt findet, höher als die des Wassers oder selbst als die der Luft in Stellen, wo ein Luftzug herrscht, wovon nur vielleicht die untersten Stellen tiefer Bergwerksgruben eine Ausnahme machen, weil dort beständig Dünste in die Höhe steigen und die Temperatur der oberen Stellen erhöhen, während die der unteren durch einen Gegenstrom von oben nach unten vermindert wird. *Rule* fand bei einer Untersuchung der Richtung solcher Luftströme in 25 der vorzüglichsten Schachten des Werkes zu Dalcoath, daſs in 13 derselben ein abwärts steigender, in den übrigen ein aufwärts steigender Strom Statt finde. *Fox* brachte in einem Schacht, der 230 Fathoms tief war, ein vier Fuſs langes Thermometer an, dessen Quecksilbergefäſs in einer Erdvertie-

fung steckte. Dieses Thermometer stand immer auf 75° — 75°.5, die Jahreszeit mochte welche immer seyn; nur der Zuflufs des Wassers, welches durch den unterbrochenen Gang der Hebmaschinen sich anhäufte, brachte es ein wenig mehr zum Steigen. Thermometer, welche 8 Z. tief in Felsen in verschiedener Höhe steckten, wovon sich der oberste 100 Fathoms unter der Erdoberfläche befand, hatten nach Verhältnifs ihrer Tiefe einen Stand, welcher sich von 57.5 — 70° änderte. Die Schachte, worin diese Beobachtungen gemacht wurden, befinden sich in Granit, und nach oben in Glimmerschiefer. Da die Werke zu Treskerby sich unter ähnlichen Verhältnissen befinden, so wurden auch in diesen einige Beobachtungen angestellt. Während im December 1819 die Temperatur der Erdoberfläche 50° *F.* betrug, hatten zwei Luftströme, die von der 149 Fath. tief liegenden Gallerie aufstiegen, eine Wärme von 72° — 76°. Im Jänner des Jahres 1820 war die Lufttemperatur nur 30°, die in der Grube blieb unverändert. Im September desselben Jahres betrug die Temperatur der Ströme 73° und 76°, die der Erdoberfläche 67°. Höhere Schachte sind meistens geräumiger als tief liegende, und fassen daher mehr Arbeiter als diese, und daher mag es kommen, dafs man erstere manchmal wärmer findet als letztere. In Cornwall hat das Gestein meistens eine verticale Schichtung, und gestattet dem oberen Wasser leicht in gröfsere Tiefe zu sinken, und davon kommt es, dafs daselbst das hervorquellende Wasser meistens wärmer ist als das Gestein selbst.

Ungeachtet so viele Gründe für die Zunahme der Temperatur gegen das Innere der Erde sprechen, so gibt es doch auch Erscheinungen, welche dieser Behauptung, wenigstens dem Scheine nach, entgegen sind, indem aus denselben hervorgeht, dafs das Wasser, das sich in

tiefen, verlassenen Gruben sammelt, eine verhältnifsmäfsig sehr niedere Temperatur hat. Hier folgt das Wesentliche solcher Erfahrungen:

Beobachtungsort.	Tiefe in Fathoms.	Temperatur n. *Fahrenheit*	Beobachter.
Alverton	Zu Tag.	55.5°	Dr. *Davy.*
H. Maid	—	55	do.
Marazion . . .	—	54	do.
H. Fortune . . .	—	55.5	do.
Anderer Platz . .	—	56	do.
Herland	—	53	*Moyle.*
detto.	—	54	do.
H. Rose	10	53.5	do.
Trevenen . . .	14	52	do.
H. Alfred . . .	18	56	do.
Relistian	25 }	55	do.
detto.	50 }		
H. Rose	54	53	do.
Klein Bound . .	52	55	*Forbes.*
Botallock . . .	65	62	do.
Ding Dong . . .	74	52.5	do.
H. Alfred . . .	112	56	*Moyle.*
H. Vor	115	64	*Forbes.*
Tresaveax . . .	100	60	*Fox.*
Gunnis Lake . .	125	57	do.
United	170	80	do.
Oatfield	182	67	*Moyle.*

Gegen diese Resultate bemerkt *Fox:* Beobachtungen über die Temperatur des in verlassenen Gruben angehäuften Wassers gestatten keinen Schlufs über den Wärmezustand des Erdkörpers, denn das Resultat solcher Beobachtungen hängt viel von der Natur und Dicke der Schichten und der gröfseren oder geringeren Permeabilität der Gänge ab. *Henwood* führt aber an, dafs einst in den 190 bis 200 Fathoms tiefen Gruben die Dampfmaschinen, welche zur Gewältigung des Wassers

bestimmt waren, zu wirken aufhörten, und darum dem Wasser gestatteten, sich zwei Tage lang anzuhäufen. Als dieses ausgepumpt war, und wieder in den Werken gearbeitet werden konnte, so wurde vor dem Beginne der Arbeit die Temperatur des oberen Schachtes $= 87^{\circ}.5$, die des unteren $= 88^{\circ}$ *F.* gefunden. Als die Beobachtung einige Tage nach dem Beginnen der Arbeit wiederholt wurde, fand man die Temperatur geringer.

Merkwürdig ist eine Reihe von Beobachtungen, die zum Behufe der Temperaturvergleichung der metallführenden Gänge mit dem nahen Gestein angestellt wurden. Die Resultate derselben enthält folgende Tabelle:

Beobachtungsort.	Tiefe in Fathoms.	Entfernung vom Gange.	Temperatur	
			des Ganges.	des andern Gesteins.
Little Bounds	52	Unbekannt	54° 56	54°
H. Neptune .	49	—	55	54
Ting Tang .	80 90	30 Fath.	64	64
detto.	110	—	68	
H. Squire . .	110	Unbekannt	72	69
Chacewater .	110	—	82	79
Treskerby .	120	—	72	66
Dolcoath . .	130	60 Fath.	63	62
United Mines	140	9 »	67	67
	160	8 »	75	69

Aus diesem geht hervor, daſs die Temperatur der Gänge im Allgemeinen höher ist, als die des daran grenzenden Gesteins. Dieser Umstand spricht, nach der Meinung des Verfassers, gegen die Annahme, daſs die innere Erdwärme von einem flüssigen Zustande des Erdkernes herrühre. Denn wäre dieses der Fall, so müſste die Temperatur einer Substanz in der Erde desto grös-

ser seyn, je dichter sie ist, und je besser sie die Wärme leitet. Aber die Granit- und Porphyrfelsen sind im Allgemeinen dichter und leitender als Glimmerschiefer und die metallführenden Gänge, und doch ist ihre Temperatur geringer als die der letztern. Im Verlaufe dieses Aufsatzes wird auch die schon vor Langem aufgestellte Meinung wieder angeführt, daſs das Wasser im Innern der Erde vom eindringenden Meerwasser herrühre. So sehr auch die Belege, welche dafür angeführt werden, für England gültig seyn mögen, so wenig dürften sie für ein Binnenland Gewicht haben; indeſs mögen sie angeführt werden, um jeden Leser in den Stand zu setzen, die Sache nach seinem Sinne zu beurtheilen. Die Reinheit des Wassers im Innern der Erde, heiſst es, steht mit der Tiefe der Stelle, wo es vorkommt, in keiner Verbindung. In den Werken Abraham und Dolcoath, den tiefsten in Cornwallis, erhielt man aus einer Pinte (4 Maſs) Wasser nur 2 Gran feste Substanz, während Wasser von H. Unity 16 Gr., von Poldice 19 Gr., von einem anderen 92 Gran feste Substanz auf die Pinte lieferte. Die durch Abdampfen erhaltenen Salze sind meistens Chloride, besonders Calciumchlorid; indeſs hat *Fox*, besonders im Wasser von Unity und Poldice, Sodiumchlorid gefunden. 92 Gran der festen Substanz enthielten 52 Gr. Calciumchlorid und 24 Gr. Sodiumchlorid, der Rest bestand aus salzsaurem Eisen und schwefelsaurem Kalk. Alle diese Bergwerke werden im Urglimmerschiefer betrieben, und sind mehrere Meilen von der See entfernt.

5. Heitzung mit warmem Wasser. Von *Fowler.*

(The Gardener's Mag. N. XXI. Aug. 1829, p. 453.)

Viele mögen wohl schon gedacht haben, daſs es zweckmäſsig wäre, warmes Wasser in Röhren in einen

Raum zu leiten, dessen Temperatur geringer ist als die des Wassers, und daher durch letzteres erhöht werden muſs; weil man aber gewöhnt ist, die Bewegung des Wassers durch die Schwere hervorgebracht zu sehen, und dann der Wasserbehälter die oberste Stelle einnehmen müſste, so mochte man wohl an der zweckmäſsigen Ausführung einer solchen Heitzmethode verzweifelt haben. *Fowler* hat diese Heitzmethode dadurch höchst anwendbar gemacht, indem er eine solche Einrichtung an den Leitungsröhren traf, daſs die Temperaturdifferenz des Wassers in zwei verschiedenen Theilen dieser Röhren als bewegende Kraft dienen kann. Um das Wesen seiner Heitzmethode einzusehen, sey *c* (Fig. 7) ein Gefäſs mit warmem Wasser, und *a b* eine $^1/_2$ Z. weite, 4 oder 5 Fuſs lange, heberförmig gebogene Röhre, wovon ein Schenkel *a* gerade aufsteigt, während der andere *b* mehrere Biegungen hat, und daher bei einer viel gröſseren Länge doch nicht höher ist als der erstere. Man denke sich diesen Heber mit Wasser gefüllt, dessen Temperatur höher ist als das Mittel, worin er sich befindet. Da wird das Wasser im Arme *a* eher abkühlen, als das in *b*, mithin dichter werden und zu sinken anfangen. Sobald dieses geschieht, rückt neues Wasser vom Gefäſse *c* durch den Arm *b* nach, und so beginnt ein Circuliren des Wassers in der Richtung von *b* nach *a*, dessen Geschwindigkeit von der Temperaturdifferenz der beiden Schenkel des Hebers abhängt.

Fowler empfiehlt diese Heitzung für Glashäuser, Bäder etc.; für letztere gibt er auch eine besondere Heitzeinrichtung an, welche Fig. 8 vorstellt. *a* ist der Wasserbehälter, auf welchen das Feuer wirkt, und worin das Wasser erwärmt wird, *b* stellt die Badwanne vor. Diese hat einen doppelten Boden, und zwischen den beiden Böden geht eine schlangenförmig gebogene Röhre *d*,

welche vom Wasserbehälter kommt, und in *c* mittelst eines Hahnes verschlossen ist, in *c* durch das Badwasser aufsteigt, und sich in die oben mit einer trichterförmigen Öffnung und einem Hahn *f* versehene verticale Röhre einmündet. Diese verticale Röhre ist in *e* wieder mit einem Hahn verschliefsbar, und an dem im warmen Wasser befindlichen offenen Ende *g* aufwärts gebogen, damit keine Luft und keine Unreinigkeit durch dieselbe hinaufsteigen kann. Dieses ganze Röhrensystem stellt nun den Heber vor, und der Trichter über *f* dient nur zum Einfüllen des Wassers, wodurch der Anfang der Wassercirculation bedingt wird. Will man das Badwasser erwärmen, so schliefst man die Hähne *e*, öffnet *f*, füllt durch den Trichter so viel warmes Wasser ein, bis der Heber damit voll ist, schliefst dann den Hahn *f*, und öffnet dafür die Hähne *e*. Sobald im längeren Schenkel das Wasser kälter ist als im kürzeren, beginnt das Circuliren desselben, und dauert fort, bis das Badwasser einen gewissen Grad erreicht hat. Es versteht sich von selbst, dafs die Schenkel des Hebers nicht über 32 Fufs hoch seyn dürfen.

B. Allgemeine Physik.

1. Über das Mafs des Druckes. Von *Bevan.*

(Phil. Mag. Oct. 1829, p. 284.)

Bekanntlich wünscht man oft den durch eine bestimmte Maschine hervorgebrachten Druck zu kennen, um ihn entweder mit dem dadurch erzeugten Effecte vergleichen zu können, oder um daraus die Gröfse der Reibung abzuleiten, welche an den Maschinentheilen Statt findet. *Bevan* lehrt diesen Druck zu finden. Man wird zwar auf den ersten Blick gewahr werden, dafs das von ihm vorgeschlagene Mittel kein sehr genaues Resultat

geben kann; aber da es sehr leicht anwendbar und gar nicht kostspielig ist, überdieſs man sich wirklich in sehr vielen Fällen gerne mit einer Annäherung an die Wahrheit begnüget, so mag davon kurz die Rede seyn. Nimmt man, sagt *Bevan*, eine kleine Bleikugel von bekanntem Durchmesser, legt sie zwischen zwei Platten aus härterem Metall, nähert diese einander in paralleler Richtung, drückt darauf mit einer bestimmten Kraft, so wird die Kugel abgeplattet, und die Gröſse dieser Abplattung wird die Stärke des Druckes anzeigen, dem sie ausgesetzt war. Mittelst einer Hebelpresse wird man leicht die Kraft bestimmen können, die erforderlich ist, um die Kugel in eine völlig flache Scheibe von $^1/_5$ Z. Dicke zu verwandeln. Bei einem solchen Versuche fand *Bevan*, daſs eine Kugel von $^5/_8$ Z. Durchmesser einen Druck von nahe 4000 Pfund erfordert, um diese Abplattung zu erleiden; eine Kugel von $^1/_8$ Z. Durchmesser braucht dazu 100 Pf. Hat man demnach einen gröſseren Druck zu messen, so setzt man demselben so viele solche Kugeln auf ein Mal aus, als man nach einer vorläufigen Schätzung für nothwendig hält, und summirt nach dem Versuch die zur Abplattung jeder einzelnen nöthigen Kräfte, um ein Gesammtresultat zu erhalten. Dabei ist es gut, die Kugeln zuerst durch einen schwachen Hammerschlag etwas platt zu machen, damit sie nicht einander zurollen, und ihre Entfernung von einander stets so groſs bleibe, daſs sie sich selbst nach der erlittenen Abplattung nicht berühren.

Mittelst dieses Mittels hat *Bevan* die Reibung einer Schraubenpresse mit eisernen Spindeln untersucht, und sie gleich $^3/_4$ — $^4/_5$ der dabei angewendeten Kraft gefunden.

2. Über die Torsion starrer Platten und Stäbe. Von *F. Savart.*

(Ann. de Chim. etc. T. 41, p. 373.)

In der neueren Zeit haben *Poisson* und *Cauchy* sehr scharfsinnige mathematische Untersuchungen angestellt über die Kraft, womit starre Körper einer Torsion entgegenwirken. *Savart* hielt es darum für nothwendig, denselben Gegenstand auf dem Experimentalwege zu untersuchen, um die Anwendbarkeit jener theoretischen Arbeiten auf wirkliche Körper aufser Zweifel zu setzen. Er bediente sich zu diesen Untersuchungen folgender Vorrichtung: Der zu untersuchende Stab wurde in horizontaler Richtung an einem Ende in einen Schraubstock befestiget, am anderen Ende mit jenem Puncte, welcher in seiner Axe lag, durch einen horizontalen Stift gehalten, etwa so wie Gegenstände, welche in eine Drehbank eingespannt sind, gehalten zu werden pflegen. Eine Stange aus Eisen oder Kupfer, die in der Mitte mit einem Loch versehen war von der Form und Gröfse, wie es der zum Versuche hergerichtete Stab forderte, fafste mit diesem Loche den Stab an ihrem Umfange so, dafs, wenn diese Stange gedreht wurde, am Stabe eine Torsion eintrat. Die Windung wurde durch ein Gewicht hervorgebracht, das man mittelst eines Stahldrahtes am Ende jener Stange aufhing. Die Gröfse der Windung konnte man an einer getheilten Scheibe messen, die sich auf den Stift aufstecken liefs, welcher mit einer Spitze das Ende des zu prüfenden Stabes hielt. Ein Gegengewicht von schicklicher Gröfse brachte den Hebelarm, woran das drehende Gewicht hing, wieder in die horizontale Lage zurück, wenn er sie durch die Drehung des Stabes verlassen hatte; auch wurde dafür Sorge getragen, dafs bei Anwendung bedeutender Gewichte

der Schraubstock seine Lage nicht ändern konnte. Auf diesem Wege erhielt *Savart* die Resultate, die hier gröſstentheils tabellarisch folgen:

1. Versuch mit einem Messingcylinder von 0.00672 M. Durchmesser und 0.649 M. Länge.

Torsionswinkel.	Angebrachtes Gewicht.	Berechnetes Gewicht.
1°	160 Gr.	160 Gr.
2°	320 »	320 »
3°	480 »	480 »
4°	640 »	640 »
5°	798 »	800 »
6°	957 »	960 »
7°	1115 »	1120 »
8°	1275 »	1280 »
9°	1434 »	1440 »
10°	1590 »	1600 »

Demnach erfolgt die Torsion bis zu einem Winkel von 4°, nach dem für elastische Körper aufgestellten Gesetze; über diesen Winkel hinaus zeigt sich eine Differenz zwischen dem beobachteten und berechneten Torsionswinkel, welche zeigt, daſs die Grenze der vollkommenen Elasticität bereits überschritten sey. Indeſs kann diese kleine bemerkbare Differenz zwischen der Beobachtung und Rechnung auch von der nicht absolut unveränderlichen Befestigung des einen Endes des Cylinders herrühren.

2. Versuch mit einem vierseitigen rechtwinkeligen Prisma von 0.6567 M. Länge und 0.00566 M. Dicke.

Drehungswinkel.	Beobachtetes Gewicht.	Berechnetes Gewicht.
1°	126 Gr.	126 Gr.
2°	252 »	252 »
3°	378 »	378 »
4°	505 »	504 »
5°	630 »	630 »
6°	757 »	756 »
7°	880 »	882 »
8°	1008 »	1008 »
9°	1135 »	1134 »
10°	1258 »	1260 »
11°	1388 »	1386 »
12°	1518 »	1512 »

3. Versuch mit einem vierseitigen rechtwinkeligen Prisma aus Messing von 0.997 M. Länge, 0.00356 M. Dicke und 0.0092 M. Breite.

Drehungswinkel.	Beobachtetes Gewicht.	Berechnetes Gewicht.
1°	55.5 Gr.	55.739 Gr.
2°	111 »	111.478 »
3°	167 »	167.217 »
4°	223.5 »	222.956 »
5°	279 »	278.695 »
6°	334 »	334.434 »
7°	390 »	390.173 »
8°	447 »	445.912 »
9°	501 »	501.651 »
10°	557 »	557.390 »
11°	612.7 »	613.129 »
12°	670 »	668.868 »

Hier ist die dritte Columne aus einem Mittelresultate berechnet, welches erhalten wurde, indem man alle beobachteten Gewichte und eben so alle Drehungswinkel addirte, und jede dieser Summen durch die Anzahl der Beobachtungen theilte.

Ähnliche Resultate erhielt *Savart* auch mit Glasstreifen, Stahlplatten mit rechtwinkeligem Querschnitte, so wie mit metallenen dreiseitigen Prismen.

Nachdem durch diese Versuche ausgemacht war, daſs das auf theoretischem Wege gefundene Gesetz für verschiedene Drehungswinkel innerhalb der Grenzen der vollkommenen Elasticität vollkommen anwendbar sey, ging *Savart* zu Versuchen über, durch welche der Einfluſs der Länge auf den Drehungswinkel untersucht wurde. Es wurden demnach Stäbe von ungleicher Länge und gleichen übrigen Dimensionen um 1° gewunden, und das dazu nöthige Gewicht mit dem verglichen, das sich aus der Rechnung ergibt. Aus folgenden Angaben sieht man, wie weit die Übereinstimmung zwischen beiden Gewichten geht.

Vierseitiges, gleichseitiges Stahlprisma von 0.00572 M. Breite.

Länge in Decimetern.	Beobachtetes Gewicht.	Berechnetes Gewicht.
12	132 Gr.	132 Gr.
11	145 »	144 »
10	159 »	158.4 »
9	175 »	176 »
8	198 »	198 »
7	226 »	226.3 »
6	263 »	264 »
5	317 »	316.8 »
4	395 »	396 »
3	525 »	528 »
2	785 »	792 »
1	1575 »	1584 »

Man kann es demnach für ausgemacht ansehen, dafs sich bei gleichen Drehungswinkeln die Gewichte verkehrt wie die Längen verhalten. Dieses Gesetz fand *Savart* auch bei vierseitigen Platten aus Glas und Eichenholz, so wie einer kupfernen Stange mit dreiseitigem Querschnitte bestätiget.

Der Theorie nach wächst das zu einer bestimmten Windung eines cylindrischen Körpers nöthige Gewicht bei übrigens gleichen Umständen wie die vierte Potenz der Durchmesser ihrer Querschnitte. Um die Anwendbarkeit dieses Gesetzes auf Naturkörper zu prüfen, bediente sich *Savart* mehrerer kupferner cylindrischer Stäbe von verschiedenen Durchmessern, hierauf kupferner Stäbe mit quadratischem Querschnitte, mehrerer Holzstäbe und Kupferstäbe mit dreiseitigem Querschnitte. Bei den cylindrischen Stäben standen für gleiche Drehungswinkel die vierten Potenzen der Durchmesser in dem Verhältnisse 33.1776 : 440.00935698 : 2279.88105 : 361 : 6678.41990656, oder wie 1 : 13.262 : 68.717 : 201.293; die Gewichte, durch welche jene Drehungswinkel erzielt wurden, wie die Zahlen 1 : 13.862 : 69.697 : 195.286. Demnach wird auch hier die Theorie als richtig angesehen werden können.

Bei den prismatischen vierseitigen Kupferstäben mit quadratischen Querschnitten verhielten sich die vierten Potenzen der Seiten wie die Zahlen 1 : 2.1393 : 14.8043, während die entsprechenden Gewichte in dem Verhältnisse der Zahlen 1 : 2.1429 : 14.7899 standen.

Bei Stäben mit rechtwinkeligem Querschnitte fand man die zur Erzeugung einer bestimmten Torsion nöthigen Gewichte in dem Verhältnisse der Quadrate ihrer Querschnitte, mithin auch der Theorie gemäfs. Auf ähnliche Weise ward die Theorie auch bei Stäben mit dreiseitigem Querschnitte bestätiget. Bei Stäben mit rechtwinkeligen Querschnitten stehen die Gewichte im

geraden Verhältnisse mit dem Producte aus der dritten Potenz der transversalen Dimensionen, getheilt durch die Summe der Quadrate dieser Dimensionen; daher stehen die Windungsbögen im verkehrten Verhältnisse mit dem Producte aus den dritten Potenzen der Dimensionen, getheilt durch die Summe ihrer Quadrate. Bleibt daher die Breite eines Stabes unverändert, und ist sie sehr grofs gegen die Dicke, so sind jene Gewichte nahe den dritten Potenzen der Dicke proportionirt, wenn auch die Elasticität nicht nach allen Richtungen dieselbe ist.

Demnach ist die Übereinstimmung zwischen der Theorie und der Erfahrung so grofs, als dieses nur zu erwarten ist, und man kann daher in allen Fällen, wo es sich um Windungen elastischer Körper handelt, von den theoretischen Formeln, wie sie *Poisson, Cauchy* und Andere entwickelt haben, unbedingten Gebrauch machen; nur mufs man manchmal, bei Stahl etc., auf gewisse, beim Abkühlen der Körper eintretende Umstände Rücksicht nehmen. So lange nämlich Metalle rein sind, sagt *Savart*, hat weder das Härten noch das Nachlassen derselben einen Einflufs auf ihre Widerstandsfähigkeit, wenigstens gilt dieses vom Kupfer, Platin und Eisen; bei Legirungen, wie z. B. bei Messing, dem sogenannten Tamtam und dem Stahle, ist es nicht so.

Ein durch einen Hammerschlag abgeplatteter Messingdraht von $0^{m}.3$ Länge wurde mehreren Windungsversuchen unterworfen, und zwar nachdem er langsam oder schnell abgekühlt war. Der Windungswinkel betrug 1°. Folgende Tafel enthält die dazu nöthigen Gewichte:

Zustand des Körpers.	Gewicht.
Durch Hämmern gehärtet .	357.5 Gr.
Langsam abgekühlt	370 »
Schnell »	357.5 »
Langsam »	370 »
Schnell »	355 »
Langsam »	367 »
Schnell »	355 »
Langsam »	367 »

Versuche mit anderen Stäben aus demselben Metalle führten zu ähnlichen Resultaten. Lange Stäbe sind zu Versuchen dieser Art nicht wohl geeignet, weil sie nicht der ganzen Länge nach einerlei Elasticität haben, wie besonders daraus hervorgeht, daſs man für eine Hälfte eines solchen 1.302 M. langen vierkantigen Stabes zu einer Windung von 1° ein Gewicht von 110 Gr., für die andere den Abmessungen nach ganz gleiche Hälfte hingegen nur 92 Gr. brauchte.

Savart führt noch Versuche mit dem Tamtan so wie mit einem Stahlstabe an, der auch wie der vorhergehende Messingdraht mehrmal nach vorausgegangenem langsamen oder schnellen Abkühlen untersucht wurde, ohne dadurch zu einem vom vorhergehenden abweichenden Resultate zu gelangen. Demnach sieht man, daſs die Schnelligkeit des Abkühlens einen groſsen Einfluſs auf die der Torsion entgegenwirkende Kraft eines Körpers habe, und daſs ein langsames Abkühlen stets eine gröſsere Reaction erzeugt, als schnelles, welches wahrscheinlich davon herrührt, daſs die kleinsten Theile im ersteren Falle dem Zuge der inneren Kräfte leicht folgen und sich regelmäſsig anordnen können.

Savart hat auch angefangen, einige Versuche über die Ausmittelung des Punctes anzustellen, bei dem jede Substanz aufhört in ihre natürliche Lage zurückzukehren, nachdem sie eine Windung durch ein ihre Reaction überschreitendes Gewicht erlitten hat, und auch den Einfluſs der Zeit kennen zu lernen, durch welche die kleinsten Theile in einer unnatürlichen Lage zu verweilen gezwungen sind, aber er ist darüber nicht zu Ende gekommen. Doch erfuhr er dabei schon, daſs, wie schwach die Windungskraft auch immer seyn mag, sie stets damit anfängt, dem Stab, auf welchen sie wirkt, eine bleibende Windung zu ertheilen, aber nach einiger Zeit immer seiner Elasticität entgegenwirkt. Verstärkt man diese Kraft, so tritt wieder eine bleibende Torsion ein, u. s. f. Läſst man eine Kraft mehrere Stunden lang auf einen Körper wirken, so nimmt der Torsionswinkel zu, aber dieser Zuwachs nimmt wieder sehr langsam ab.

3. Über die Reduction der Bewegung eines Pendels auf den leeren Raum. Von *E. Sabine.*

(Phil. transact. 1829. P. I., p. 207.)

Den Freunden streng wissenschaftlicher Forschungen im Gebiete der Physik wird nicht unbekannt seyn, daſs *Bessel* die gewöhnliche, schon seit *Newton's* Zeiten übliche Art, den Einfluſs eines widerstehenden Mittels auf die Schwingungen der Pendel in Rechnung zu bringen, für mangelhaft hält, weil man die Kraft, die dem Pendel nach Wegnahme des Theiles, welcher dem Widerstande entspricht, übrig bleibt, nur auf die Masse des Pendels vertheilt denkt, während doch nicht bloſs dieses, sondern auch ein Theil des Mittels dadurch in Bewegung gesetzt werden muſs. Um nun die Richtigkeit der Bemerkung dieses wahrhaft groſsen Gelehrten

zu prüfen, hielt es *Sabine* für nothwendig, Pendelversuche in einem Raume anzustellen, in welchem man die Luft nach Belieben verdünnen, ja sogar die Atmosphäre mit einem anderen Gase, z. B. mit Hydrogengas verwechseln konnte. Es wurde zu diesem Behufe von *Newmann* ein besonderer Pendelapparat construirt, dessen Hauptheile aus Eisen bestanden, den man mit einer Art großen Recipienten luftdicht schliessen konnte, und der sich mit einer Luftpumpe in Verbindung bringen liess. Die Schwingungszeit dieses Pendels wurde abwechselnd in der Luft von natürlicher Dichte und bei starker Verdünnung derselben mittelst der *Borda*'schen Methode der Coincidenzen mit Beihülfe einer guten Pendeluhr bestimmt. Wurde die Pendelbewegung nach der bisher üblichen Ansicht bei 45° *F.* und dem Luftdrucke von 30 engl. Zollen auf den leeren Raum reducirt, so fand man, dass die desshalb nöthige Correction der in einem Tage vollbrachten Schwingungsanzahl 6.26 Oscillationen betrug; der Versuch in verdünnter Luft zeigte aber, dass diese Correction für dieselbe Temperatur und denselben Luftdruck 10.36 Oscillationen ausmache. Daher gibt die bis jetzt üblich gewesene Correction die Schwingungsanzahl um 4.1 Einheiten zu klein an.

Für die Temperatur von 40° *F.* und einem Luftdrucke von 30 Z. fand *Sabine* die Reduction der einem Tage entsprechenden Schwingungsanzahl von der atmosphärischen Luft auf den leeren Raum 5.27 Mal größer, als die vom Wasserstoffgas auf den leeren Raum; ein anderer Versuch gab dieses Verhältniss mit 10.41 : 2 an, so dass man es im Durchschnitte mit 5 ¹/₄ : 1 bezeichnen kann.

* * *

Es geht demnach aus diesen Versuchen hervor, dass die bis jetzt übliche Reductionsmethode des Pendels auf

den leeren Raum nicht richtig sey; indeſs dürfte manches die Schärfe der Resultate dieser Versuche verdächtig machen, denn der Mangel am luftdichten Schluſs des Recipienten, worin sich das Pendel befand, machte es nothwendig, selbst während der Versuche die Luftpumpe in Thätigkeit zu erhalten, um die eingedrungene Luft wieder wegzuschaffen; ein Umstand, der auf das Resultat so delicater Versuche leicht einen schädlichen Einfluſs ausüben konnte. *Bessel* selbst hat die Schwierigkeiten solcher Versuche in seinem classischen Werke über die Länge des einfachen Secundenpendels (Berlin 1828, S. 37) anerkannt, und es nicht gewagt, von denselben Gebrauch zu machen. Dieser Gelehrte hat darum einen anderen Weg eingeschlagen, um das Mangelhafte der alten, und die Richtigkeit seiner Theorie zu bewähren. Er lieſs nämlich verschiedene Körper im Wasser und in der Luft schwingen, und zwar:

1. Ein langes Pendel mit messingener Kugel. Dieses brauchte zu einer Schwingung in der Luft 1″.7217 m. Z., im Wasser 1″.9085 m. Z.
2. Ein kürzeres Pendel mit derselben Kugel. Es brauchte zu einer Schwingung in der Luft 1″.0020 m. Z., im Wasser 1″.1078 m. Z.
3. Ein Pendel, von der Länge des ersteren, mit einem hohlen geschlossenen Messingcylinder, der eben so schwer war, wie die vorhin gebrauchte Kugel. Die Zeit einer Schwingung in der Luft war 1″.7244 m. Z., im Wasser 2″.7892 m. Z.
4. Ein Pendel von der Länge des eben gebrauchten kürzeren mit demselben Cylinder. Es machte eine Schwingung in der Luft in 1″.0104 m. Z., im Wasser in 1″.6385 m. Z.
5. Das Pendel 3. mit dem Cylinder ohne Boden. Es

oscillirte ein Mal in der Luft in 1″.7199 m. Z., im Wasser in 2″.5675 m. Z.

6. Das Pendel 4. mit dem Cylinder ohne Boden. Die Dauer einer Schwingung in der Luft war 1′.0019 m. Z., im Wasser 1″.5042 m. Z.

Nun berechnete aber *Bessel* aus der in der Luft beobachteten Schwingungszeit die im Wasser nach der bisher gebrauchten Theorie, und fand die Werthe, welche folgende Tafel enthält, der zur besseren Übersicht gleich die beobachteten Schwingungszeiten beigesetzt wurden:

		Schwingungsdauer.	
		Berechnet.	Beobachtet.
Kugel von Messing	langes Pendel	1.8373	1.9085
	kurzes »	1 0693	1.1078
Hohlcylinder. . .	langes »	2.3928	2.7892
	kurzes »	1.4021	1.6385
detto. ohne Boden	langes »	1.8339	2.5675
	kurzes »	1.0683	1.5042

Es stimmt daher die ältere Theorie auch mit diesen Versuchen nicht überein, und ihre Unzulänglichkeit dürfte wohl keines weiteren Beweises mehr bedürfen.

4. Über die im Steinsalz vorkommenden, mit Flüssigkeiten gefüllten Höhlen. Von *Nicol.*

(Edinb. phil. journ. N. 13, p. 111.)

Die Krystalle des in England vorkommenden Steinsalzes sind in der Regel mehr oder weniger undurchsichtig, und von röthlicher Farbe; doch trifft man manchmal auch weiſse und vollkommen durchsichtige an. Bei der Untersuchung eines solchen Exemplares aus Cheshire bemerkte *Nicol* eine groſse Menge kleiner, unregelmäs-

sig vertheilter Höhlungen, die ganz mit einer Flüssigkeit angefüllt waren, und nur in einigen derselben konnte man ein Luftbläschen bemerken; wurde eine Höhlung, worin man keine Luftkügelchen bemerkte, nur ein wenig erwärmt, so bemerkte man eines in dem Augenblicke, wo die Wärme zu sinken anfing. Wird ein Krystallstück, worin sich eine Höhlung mit einem sichtbaren Luftbläschen befindet, erwärmt, so verringert sich das Volumen dieses Bläschens, und verschwindet, bevor noch der Krystall so heiſs geworden ist, daſs er beim Berühren mit dem Körper eine schmerzhafte Empfindung hervorbringt. Beim Erkalten erscheint es wieder, und nimmt am Volumen zu, bis die Temperatur des Krystalls der der Atmosphäre gleich kommt.

Berührt man mit einem heiſsen Eisendrahte die einem solchen Kügelchen entgegengesetzte Seite der Höhlung, so zeigt es nicht die mindeste Neigung, sich zu bewegen; durchbohrt man das Mineral bis zu der Stelle, wo sich die Höhlung befindet, so wird das Volumen des Bläschens ein wenig gröſser, doch treibt es nichts von der Flüssigkeit durch die Öffnung heraus. Dieser Umstand beweiset, daſs die Expansivkraft der Luft in den Höhlungen der Steinsalzkrystalle viel geringer ist, als im Fluſsspath und Schwerspath. (Vergleiche hiemit Bd. I., S. 414 dieser Zeitschrift.)

Öffnet man eine solche Höhlung völlig, so geht die Flüssigkeit nicht heraus und zeigt keine Neigung zum Krystallisiren, selbst wenn die atmosphärischen Verhältnisse eine gesättigte Kochsalzlösung schnell zum Krystallisiren bestimmen würden. Doch fügt sie sich in die Gesetze der Krystallisation, wenn man sie erhitzt, und schieſst in feinen, nadelförmigen Krystallen an, die aber bald zerflieſsen, wenn auch die Luft sehr trocken zu seyn scheint.

Dieser Umstand beweiset, daſs diese Flüssigkeit keine Kochsalzlösung sey. *Nicol* hatte nicht genug von derselben sammeln können, um über ihre chemische Natur ins Reine zu kommen. Gibt man einige Tropfen salpetersaures Silber in die Flüssigkeit, so bildet sich ein bedeutender Niederschlag, der auf das Daseyn von Salzsäure schlieſsen läſst. Salzsaurer Baryt erzeugt keinen Niederschlag, und die Flüssigkeit enthält daher keine Schwefelsäure. Oxalsaures Ammoniak gibt einen schwachen Niederschlag, zum Beweise, daſs die Flüssigkeit etwas Kalk enthalte; kohlensaures Kali bewirkt den reichlichsten Niederschlag, und man kann daher ohne weiters annehmen, daſs salzsaure Magnesia der Hauptbestandtheil jener Flüssigkeit sey. Man kann demnach die in den Höhlungen des Steinsalzes vorhandene Flüssigkeit als gesättigte Auflösung von salzsaurer Magnesia mit einer geringen Menge salzsaurem Kalk vermengt ansehen.

C. Meteorologie.

1. Über die Ursachen der Färbung des Schnees.

(Bibl. univ. Oct. 1829, p. 172)

Roth gefärbten Schnee hat zuerst *Saussure* und hierauf Cap. *Parry* auf seiner Reise in die Polargegenden bemerkt. Letzterer brachte die färbende Substanz dieses Schnees mit sich zurück, und *Bauer*, *Brown* und mehrere Andere erkannten sie als eine kleine kryptoganische Pflanze. *Wrengel* fand dieselbe Substanz an den Felsen im Norden Schwedens, und erkannte sie ebenfalls als eine Pflanze. Man hat die den Schnee in den Polargegenden färbende Masse, welche Cap. *Parry* mitbrachte, mit dem färbenden Principe des Alpenschnees vergli-

chen, und als völlig identisch erkannt. Die Botaniker nennen diese Pflanze *Protococcus nivalis.* Die Pflanzen, welche unter dem Namen *Protococcus chermisinus, Palmella nivalis, Uredo nivalis, Lepraria chermisino* bekannt sind, unterscheiden sich von ersterer nicht. Aber auch thierische Substanzen können dem Schnee, dem Eise und dem Wasser eine besondere Färbung ertheilen. Das Wasser des Sees Morat wird durch ein Thier gefärbt, das *De Candolle* unter dem Namen *Oscillatoria rubescens* beschrieben hat, und *Scoresby* hat zwei andere Thiere bezeichnet, welche das Eis in den Polargegenden färben. Das Wasser der Polarmeere hat, nach seinen Erfahrungen, die Eigenschaft, das poröse Eis oder den dichten Schnee röthlichgelb zu färben, sobald es von schmutzig olivengrüner Farbe erscheint, welches an den Küsten von Spitzbergen und Grönland häufig der Fall ist. Die Färbung des Schnees oder Eises zeigt sich besonders an den Kanten gröfserer Massen, und das Thier, welches die Färbung erzeugt, ist dem sehr ähnlich, welches *Lamark Beroë globuleux* nennt. Es gehört in die Classe der Kugelthiere, ist durchscheinend, von der Gröfse eines Stecknadelkopfes, und hat paarweise angeordnete Puncte. In einer Breite von 71° 15′ und einer westl. Länge von 17° 20′ fand er auch bräunlich rothes Wasser, dessen Farbe von Myriaden sehr lebhafter Thierchen abhängt, die an Gestalt einem Fingerhut gleichen, aber nur $^1/_{2160}$ Z. grofs zu seyn scheinen, so dafs ein Tropfen Wasser deren über 12000 enthalten kann *). Da er weder Schnee noch Eis in der Nähe hatte, so

*) *Scoresby* gibt die Länge eines solchen Thieres mit $^1/_{2160}$ Z., die Breite mit $^1/_{3260}$ Z. an. Es legte in einer Secunde einen Weg von $^1/_{210}$ Z. zurück. In einem Tropfen Wasser fand er mittelst eines Mikroskopes mit einem Glasmikrometer nahe 12.960 solcher Thiere. *B.*

konnte er ihren Einflufs auf die Färbung derselben nicht ausmitteln.

Demnach kann Schnee und Eis aus mehreren Ursachen eine Färbung erhalten. Glaubwürdige Personen versichern, in den Schweizeralpen rothe Schneeflecken gesehen zu haben, die von angehäuften kleinen Thierchen herrühren; andere sprechen gar von blauem Schnee.

2. Über das Nordlicht. Von *J. Farquharson.*

(Phil. transact. 1829. *P. I.*, *p.* 103.*)*

Gegenwärtiger Aufsatz handelt von dem Entstehen, der Anordnung und der Ausbildung des Nordlichtes. Der Verfasser desselben hat schon im Jahre 1823 eine Arbeit in das *Edinb. phil. journ.* einrücken lassen, worin er sich über diesen Gegenstand ausspricht, und folgende Behauptungen aufstellt: Das Nordlicht hat unter allen Umständen eine gewisse Anordnung und Gestalt, und schreitet auf bestimmte Weise fort. Die Lichtbüschel, welche von demselben ausstrahlen, erscheinen zuerst im Norden, und bilden einen von West nach Ost gespannten Bogen, dessen Scheitel sich im magnetischen Meridian befindet. Dieser Bogen hat, so lange seine Höhe nur klein ist, eine bedeutende Breite in der Richtung von Nord nach Süd, die ausfahrenden Strahlen schneiden ihn, und sind gegen einen südlich vom Zenith liegenden Punct hin gerichtet; der Bogen selbst bewegt sich gegen Süden hin, wird immer schmäler, je näher er dem Zenith kommt, gewinnt aber an Lichtstärke. Die Lichtbüschel in der Nähe des magnetischen Meridians werden kürzer, und die Winkel, die die ausfahrenden Strahlen in der Nähe der Endpuncte des Bogens mit demselben machen, werden immer spitziger, bis die Strahlen in den Bogen fallen. Dann erscheint der Bogen selbst nur als schmaler. 3° — 4° breiter Gür-

tel, der auf dem magnetischen Meridian senkrecht steht. Er rückt immer weiter gegen Süden fort, und erst nachdem er das Zenith um einige Grade überschritten hat, wächst seine Breite wieder, und er nimmt die vorher besprochenen Veränderungen wieder in verkehrter Ordnung an. Alle diese Erscheinungen meint der Verfasser erklären zu können aus dem gänzlich oder nahe verticalen Stande der Lichtbüschel. Seit dieser Zeit hat er mehrere Nordlichter in seinem Aufenthaltsorte in einer Breite von 57° 15′ beobachtet, und das vorhin Erwähnte bestätiget gefunden, mit Ausnahme zweier Puncte, die sich auf die Masse einzelner, bei den Nordlichtern vorhandener Gröfsen beziehen. Der Punct nämlich, nach welchem die Lichtbüschel hinzielen, liegt nicht, wie er früher behauptete, 10° südlich vom Zenith, sondern den neuesten Beobachtungen gemäfs 15°. Ferner ist die Breite des Ringes im Zenith nicht, wie vorhin behauptet wurde, nur 5°, sondern mehr als 6°.

Farquharson beschreibt nun drei vorzügliche von ihm beobachtete Nordlichter, und glaubt darin nicht blofs eine Bestätigung seiner früheren Aussprüche gefunden zu haben, sondern auch einiges Nähere über die Höhe des Nordlichtes bestimmen zu können. Das erste sehr merkwürdige Nordlicht beobachtete er am 22. November 1825. Als er es gewahr wurde, waren schon zwei deutliche von einander getrennte Bögen an der Nord- und Nordostseite des Himmels gebildet; die Continuität des einen war nur durch wenige einzeln stehende Wolken gestört, die mit dichtem Nebel von Norden her kamen, und vom Monde hell beleuchtet waren. Der südlichere Bogen stand noch nahe 25° vom Zenith, er war an der Westseite in einer Höhe von 35° plötzlich abgeschnitten, der westliche Theil reichte fast bis zum Horizont. Die Strahlen, welche vom Scheitel dieses

Bogens ausfuhren, waren kurz, dicht, und mit dem magnetischen Meridian parallel; sie wurden gegen die beiden Enden des Bogens hin immer länger, und zielten nach einem 10° — 15° südlich vom Zenith gelegenen Puncte. Die Breite des Bogens betrug nahe 10°; er schritt in paralleler Richtung gegen Süden fort, und wurde dabei immer schmäler; als er das Zenith erreicht hatte, war er nur mehr 3° — 4° breit, stand genau auf dem magnetischen Meridiane senkrecht, sein Scheitel sendete nur noch nebeliges Licht aus, und aus den Enden fuhren Strahlen nach der Richtung des Bogens hin. Der zweite Bogen war mit dem ersten parallel, aber niedriger als dieser; sein Scheitel stand nur 25° — 30° über dem Horizont; er war 15° — 20° breit, aber an den Rändern nicht scharf begrenzt und nicht unveränderlich an Breite. Auch dieser Bogen schritt gegen Süden hin, und hob sich dabei mehr über den Horizont, so dafs er an Länge und Breite zunahm, kurz er erlitt ähnliche Veränderungen wie der erstere. Eine lichte Stelle am Nordpuncte des magnetischen Meridians versprach einen dritten Bogen zu liefern, und sandte schon einige Strahlenbüschel aus, doch unterblieb die völlige Ausbildung.

Ein anderes Nordlicht ward am 9. September 1827 um 11 Uhr beobachtet. Beim ersten Anblick erschien ein an den Enden ausgezackter Lichtbogen, dessen östliches Ende mit röthlichem Lichte bis zum Horizont herabreichte, während sein westliches auf einer tief stehenden Wolke aufstand. Jenes Ende war ungewöhnlich (über 20°) breit. Hierauf erschien ein anderer 40° hoher, 20° — 25° breiter Bogen mit Strahlen, die gegen einen südlich vom Zenith liegenden Punct hinzielten. Der Horizont erschien in der Gegend des magnetischen Meridians stark erleuchtet. Beide Bögen zeigten bald

ein Vorrücken gegen Süd, der höhere erreichte in wenigen Minuten das Zenith, und erschien daselbst schmäler und besser begrenzt. Sein östlicher Ast löste sich in zwei abgesonderte und nahe verticale Lichtsäulen auf, wovon die südlichere als Fortsetzung des ursprünglichen Bogens selbst erschien, die nördliche aber 20° Höhe hatte. Jede dieser Säulen war, als ihre Breite am geringsten erschien, 5° breit, und ihr Zwischenraum etwas gröſser; sie bestanden wahrscheinlich aus zwei in parallelen Ebenen liegenden Lichtfranzen, deren eine nördlicher und östlicher lag als die andere. Der Rest dieses Bogens war im Zenith 6° breit, seine Geschwindigkeit, mit der er nach Süden vorrückte, betrug 40° in 10 Minuten. Als er 30° über das Zenith hinausgekommen war, verschwand er plötzlich. Der nördlicher gelegene Bogen rückte wie der erstere vorwärts, und erlitt im Allgemeinen dieselben Veränderungen wie dieser.

Das dritte Nordlicht endlich, welches der Verfasser beobachtete, fand am 29. September 1828 Statt. Es fand dabei nichts besonders Merkwürdiges Statt, was nicht schon früher beobachtet worden wäre, nur ist der Umstand anzuführen, daſs dieses Nordlicht gleichzeitig von Mehreren beobachtet wurde, und da alle Beobachter in der Hauptsache mit einander übereinstimmen, über die Richtigkeit derselben kein Zweifel übrig bleibt.

Der Verfasser benützt diese und frühere Beobachtungen, bei denen er das Nordlicht mit gleichzeitig am Himmel vorhandenen Wolken verglich, dazu, um die Höhe des Nordlichtes auszumitteln, und gelangt zu dem Schluſs, daſs das Nordlicht nicht höher stehe als die Wolkenregion. Hierin stimmen auch *Parry*, *Scherer* und *Roſs* überein, die behaupten, daſs das Nordlicht unmittelbar ober der Gegend erscheine, wo die Wasser-

dünste sich zu Wolken umbilden. Die wirkliche Höhe wechselt daher mit dem Zustande der Atmosphäre.

3. Höhe des Nordlichtes. Von *Dalton.*

(Phil. transact. 1828. *P. II., p.* 291.*)*

Mit den so eben erwähnten Behauptungen über die Höhe des Nordlichtes steht das im Widerspruche, was *Dalton* für wahr hält. Wir wollen das Wesentliche der Gründe anführen, die das Urtheil dieses ausgezeichneten Gelehrten bestimmten.

Am 29. März 1829 um 8 — 10 U. Abends sah man an mehreren Orten Schottlands und Englands ein besonders regelmäſsiges und glänzendes Nordlicht. Aus den hierüber gesammelten Nachrichten schlieſst *Dalton,* daſs der Lichtbogen in der ersten Stunde keine Bewegung hatte, hierauf aber anfing sich mit einer Geschwindigkeit von mehreren Graden nach Süden zu bewegen. Überall, wo man dieses Phänomen beobachtete, schien der Scheitel des Bogens im magnetischen Meridian zu stehen. Die Höhe dieses Meteores schätzt *Dalton* auf 100 Meilen; er führt aber noch mehrere andere Höhenbestimmungen an. Nach den von *Cavendish* gemachten und berechneten Beobachtungen sollte die Höhe des Nordlichtes 52 — 70 Meilen betragen. *Crosthwaite* und *Dalton* selbst setzen die Höhe eines im Jahre 1793 beobachteten Nordlichtes mit 32 Meilen an. Aus mehreren Bestimmungen *Bergmann's* ergibt sich für dieses Meteor eine Höhe, die von 130 bis 1000 Meilen und darüber wechselt. Andere Beobachtungen über ein Nordlicht vom 17. October 1819 setzen die Höhe desselben mit 100 Meilen fest. Alles dieses zusammengenommen bestimmt *Dalton* zu der Behauptung, ein Nordlicht mit leuchtenden, vollständigen Bögen sey nahe 100 Meilen über der Erdoberfläche. Man sieht demnach, daſs *Dalton's* An-

gabe von der vorhergehenden sehr stark abweicht. Setzt man ein Nordlicht mit *Farquharson* in die Region, wo sich die Dünste zu Wolken niederschlagen, so gibt man ihm eine Höhe von nahe 2000 Fuſs, während hier von 100 Meilen die Rede ist.

Die Herausgeber des *Bulletin des sciences*, die diese Arbeit *Dalton's* auch in den physikalisch-mathematischen Theil (August 1829) derselben aufgenommen haben, führen einiges an, das mit *Dalton's* Meinung eben so im Widerstreit ist, wie die vorhin erwähnte Behauptung *Farquharson's*. Sie sagen: 1) Nach den gleichzeitigen zu Basquian-Hils und Cumberland-House vom Lieutenant *Hood* und *Richardson* angestellten Beobachtungen mehrerer Nordlichter kommt dieser Erscheinung nur eine Höhe von 7 — 8 Meilen zu, und Cap. *Franklin* bestätiget dieses. 2) Die Winkelhöhe, woraus *Dalton* seine Schlüsse zieht, kann nicht genau oder nicht gleichzeitig gemessen seyn, denn wäre sie dieses, so käme der Atmosphäre eine gröſsere Höhe zu, als man ihr gewöhnlich zuschreibt, weil man doch nicht annehmen kann, das Leuchten des Nordlichtes rühre vom Lichte eines ponderabilen, etwa Cometenähnlichen, auſser der Atmosphäre befindlichen Stoffes her, sondern habe in der Atmosphäre seinen Sitz. Man könnte noch hinzusetzen, was schon *Biot* anführt, daſs das Nordlicht in der Atmosphäre entstehen müsse, weil es an der täglichen Bewegung der Erde Theil nimmt, und daher seine Höhe geringer ist, als die Grenze der Atmosphäre.

4. Einwirkung der Nordlichter auf die Magnetnadel.

Die Einwirkung der Nordlichter auf die Magnetnadel ist von sehr ausgezeichneten Gelehrten behauptet und bezweifelt worden. *Arago* hat mit besonderem Fleiſse

Thatsachen gesammelt, welche diese Einwirkung beweisen; *Brewster* hingegen hält sie noch immer für unzulänglich, um die Sache aufser Zweifel zu setzen, wie man aus den Arbeiten dieser Gelehrten, welche in Bd. IV., S. 340 u. f. dieser Zeitschrift enthalten sind, ausführlich entnehmen kann. Seitdem dieser Streit begonnen hat, sind mehrere Beobachtungen bekannt geworden, welche für das Daseyn einer solchen Einwirkung sprechen, insbesondere haben die Nachrichten *Kupffer's* in Kasan und *Richardson's* die Sache einer definitiven Entscheidung sehr nahe gebracht. Folgende aus dem in Nordamerika erscheinenden *Sillimann*'schen Journal entlehnte Notiz dürfte aber doch nicht überflüssig seyn, da sie Beobachtungen betrifft, die in einer ganz anderen Gegend angestellt wurden, als die *Kupffer's* und *Richardson's* (jener beobachtete zu Kasan, dieser am Bärensee), nämlich in Nordamerika. Die Beobachtung, von der hier die Rede ist, wurde am 28. August 1827 um 10 Uhr Abends während eines sichtbaren Nordlichtes angestellt. Ich stellte, heifst es in der erwähnten Quelle, eine sehr empfindliche, horizontal schwebende Magnetnadel an das Fenster meines Zimmers, das an der Nordseite des Hauses lag, und in ein anderes, 10 Fufs davon entferntes, eine Neigungsnadel. Bei näherer Betrachtung sah ich, dafs keine von beiden in Ruhe kommen wollte. Die horizontal schwebende machte Schwingungsbögen, deren Mittel um 5° westlicher lag als der magnetische Meridian. Die Neigungsnadel oscillirte von 64° bis 75°, und war in beständiger Unruhe. Oft blieb sie bei 60° einen Augenblick stehen, und zeigte blofs eine zitternde Bewegung, dann schritt sie aber bis 75° — 76° fort, und ihr Stand entsprach einer Neigung von 69° $^1/_2$, welche von der wahren, dem Beobachtungsorte entsprechenden Inclination um 2° $^1/_2$

abweicht. Der Glanz des Nordlichtes nahm bis 10 Uhr 30 Minuten zu, und verschwand hierauf bis auf einen hellen Schein am nördlichen Horizont.

Die horizontal schwebende Nadel blieb noch in beständigem Zittern begriffen, doch schwankte sie nicht über 2° hinaus. Die Neigungsnadel blieb unter 71° stehen, während die wahre Inclination 72° betrug. Am 29sten und 31sten desselben Monates waren wieder Nordlichter sichtbar. Auch da wurden die Magnetnadeln beobachtet; man bemerkte aber nichts Besonderes, aufser dafs sie etwas schwerer zur Ruhe kamen als sonst.

5. Ungewöhnliche Lichtbrechung in der Atmosphäre. Von *Cruickshank*.

(Edinb. phil. journ. N. 14, p. 254.)

Am 10. Juni 1826 herrschte zu Aberdeen dichter Nebel und schwacher OSO. Wind. Zwischen 8 und 9 Uhr verliefs der Nebel das Land, und es folgte lebhafter Sonnenschein, doch blieben über der See in einiger Entfernung scheinbar dichte Nebel zurück, und dehnten sich öfters bis an die Küste aus. Da erschienen die über 24 englische Meilen entfernten Felsen von Slains Castle höher und an einigen Stellen auch deutlicher, ja selbst Stellen, die man bei dem gewöhnlichen Zustande der Atmosphäre nicht sehen konnte, wurden auf Augenblicke deutlich sichtbar. Die Klippen und das daran westlich grenzende Land bis zu einer Entfernung von zwei Meilen schienen alle 10 Minuten ihre Höhe zu ändern, so dafs sich die ganze Ansicht über die See zu heben und wieder in dieselbe unterzutauchen schien. Mit einem achromatischen, schwach vergröfsernden Fernrohre zeigte sich dasselbe an kleinen, über 21 Meilen von Aberdeen entfernten Gegenständen. Mehrere derselben, die einige Augenblicke hindurch nur als kleine runde

Flecke erschienen, erhoben sich nach und nach zu einer vier- oder fünffachen Höhe; ein anderes Mal schienen sie an ihrem Platze fest zu bleiben, aber über ihnen erschien ihr treues Bild zwei oder gar drei Mal. Schmälere Gegenstände, wie die Giebel von Häusern, erhoben sich zu hohen Säulen, ohne doch ihr Abbild blicken zu lassen.

Das gelbe Dach eines Farmhauses war von der Sonne stark beleuchtet und erschien scharf begrenzt als vollkommenes Dreieck mit horizontaler Basis, die etwa doppelt so groſs war, als die Höhe. Dieses schien manchmal eine fünf Mal gröſsere Höhe zu erreichen, und wieder zu seiner natürlichen Gröſse zurück zu kehren. Manchmal schien sein treues Bild über ihm, ja selbst ein zweites Bild lieſs sich sehen, und es erschienen drei völlig gleiche Rechtecke über einander. Der Abstand dieser Bilder von einander war veränderlich. Oft theilte sich das verlängerte Bild des Objectes ab, und lieferte so zwei oder drei Bilder. Diese Erscheinung dauerte eine halbe Stunde, hierauf trat ein solches Zittern der Luft ein, daſs man auf deutliches Sehen ferner Gegenstände verzichten muſste.

6. Über das Steigen der Gewässer des Oceans.

*(Monthly Magazine. *)*

Bekanntlich reiſsen die Flüsse bei ihrem Hinabströmen in das Meer Erdstücke und andere Dinge mit sich hinab, die eine der Gröſse des mitgeführten Körpers angemessene Quantität von Wasser verdrängen müssen. Auch von den Klippen, welche das Meer bespült, lö-

---

*) Mitgetheilt von Dr. *Rumy* in Gran.

sen sich fortwährend grofse Stücke ab, die gleichfalls dazu beitragen, den Grund des Oceans zu füllen.

Georg Staunton hat über den gelben Flufs in China folgende Berechnung angestellt: Die Breite dieses Stromes belief sich, als ihn Lord *Macartney* passirte, auf $^{3}/_{4}$ Meilen, seine mittlere Tiefe auf 5 Fufs, und die Schnelligkeit seines Laufes auf 4 Meilen. Daraus folgt, dafs von diesem Flusse stündlich eine Quantität Wasser in das gelbe Meer hinabfliefst, die 418,176,000 K. Schuh oder 2,563,000,000 Galonen Wasser beträgt. Nach angestellten Versuchen fand man, dafs das Wasser ungefähr den zweihundertsten Theil seiner Masse an Schlamm enthielt. Zufolge dieser Erneuerung von Schlamm, welchen das Wasser des gelben Stromes enthält, wird stündlich eine Quantität von 2 Millionen K. Schuh Erde ins gelbe Meer hinabgeschwemmt, folglich jeden Tag 48 Millionen, und binnen eines Jahres 17,520,000,000 K. Schuh.

Angenommen nun, dafs die mittlere Tiefe des gelben Meeres in der Mitte 20 Faden oder 120 Schuh beträgt, so müfste die Quantität von Erde, welche der gelbe Flufs ins Meer hinabführt, wenn sie sich auf einem Haufen befände, hinreichend seyn, während 70 Tagen auf der Oberfläche des Meeres eine Insel von einer Quadratmeile im Umfange zu bilden. Wollte man diese Berechnung weiter ausdehnen, so würde man finden, in welchem Zeitraume sich das gelbe Meer durch die fortwährenden Absetzungen des gelben Flusses selbst ausfüllen müfste; denn wenn man die Oberfläche des Meeres zu 125,000 Quadratmeilen annimmt, so käme die Summe mit der zur Gründung einer Quadratmeile erforderlichen Zahl heraus. Das Fortschreiten ist zwar langsam, aber gewifs.

Middleton hat berechnet, dafs zur Bildung der Lagen, die zwei Meilen über die Granit-Urgebirge erha-

ben sind, 1,056,000 Jahre erforderlich sind, während welcher Zeit die Meeresfluthen das feste Land bedecken müssen. Der Fortschritt der Nachtgleichen beträgt ungefähr einen Grad in 72 Jahren, so dafs 25,920 Jahre erforderlich seyn würden, wenn die Äquinoctial-Puncte nach Westen zu rund um die Erdkugel rücken sollten. Vierzig solcher Umwälzungen müssen, nach *Middleton*, während der Zeit Statt gefunden haben, als sich die zweite Lage über dem Granit bildete. Den Granit heifst man zwar Urfels, da er aber aus Quarz, Feldspath und Glimmer besteht, so müssen diese Gebirgsarten früher als er selbst da gewesen seyn, und das Meer mufs eine sehr lange Zeit zur Absetzung dieser ältern Gebirgsarten und zur Sammlung einer so grofsen Masse davon, als zur Bildung der Urgebirge erforderlich war, gebraucht haben.

VI.

Fallen eines Meteorsteins am Bord eines auf hoher See segelnden Schiffes;

mitgetheilt vom

Dr. *Johann Lhotsky.*

Als mir nachfolgende Daten aus den Tagebüchern und mündlichen Beantwortungen des k. k. Gärtners, Hrn. *Carl Ritter* in Wien, der im Jahre 1820 (auf einem Schiffe des Herrn Baron *Joseph von Dietrich*) eine Reise nach Hayti unternommen hatte, bekannt wurden, hielt ich diese Erscheinung gleich in vorhinein für eine der seltensten, die in diesem Bereiche der Wissenschaft je beobachtet wurden. Weitere Nachforschungen bestätigten diefs vollkommen, und es zeigte sich, dafs das Fallen von Meteorsteinen auf offener See eines von jenen Phänomenen sey, die selbst von den competentesten Richtern dieses Faches: *Gilbert* und *Chladni*, bis zur neuesten Zeit in Zweifel gezogen wurden *).

Das Schiff Echer von Liverpool, Cap. *John Smart*, auf welchem sich aufser Hrn. *Ritter* noch die Herren *Türner* aus Triest und *Rauch* aus Nürnberg, beides Kaufleute, befanden, segelte bei vollkommen heiterem Himmel mit mäfsigem Westwinde am 5. April 1820 unter 20° 10′

*) *Chladni* in seinem Werke: »Über Feuermeteore und die mit denselben herabgefallenen Massen, Wien 1819,« erwähnt p. 227 und 228 zwei ähnliche Fälle aus dem siebzehnten Jahrhundert, aber von so wenig Begründung, dafs selbst das Jahr nicht genau angegeben werden konnte. Mehr Sicherheit spricht sich in dem p. 291 angegebenen, ähnlichen Factum vom Jahre 1809 aus, aber auch da fehlt alle nähere Beobachtung.

nördl. Breite und 51° 50′ westl. Länge *). Um 11 Uhr früh erschien mit einem Male in NNO., ungefähr 35° über dem Horizont, eine Wolke, wie sie die englischen Seeleute *blak squall* nennen, von graulich schwärzlicher Farbe. Diese Wolke vergröſserte sich allmählich, und zog ziemlich niedrig gegen das Schiff, welches sie endlich ganz einhüllte, und sich dabei in einen senkrechten, nicht zu starken Platzregen entlud. Während die Wolke im Zenith des Schiffes vorbeieilte, fiel *(ohne alle andere Nebenumstände)* ein Stein auf selbes, welcher aber sogleich in mehrere kleinere Stücke zersprang. Der Wind wurde während dieser Erscheinung etwas stärker, jedoch nicht sturmartig *(a fine breeze)*. Die Wolke verfolgte ihre Bahn nach SWW., und verschwand endlich im Horizonte, nachdem das ganze Phänomen, von dem Erscheinen der Wolke bis zu ihrem Verschwinden, 1/4 Stunde gedauert hatte. Darauf wurde der Himmel wieder so rein und heiter wie zuvor.

Der Stein, welcher 1/2 Pfund gewogen haben mag, und wovon Hr. *Ritter* und Cap. *Smart* die gröſsten Stücke verwahrten, war bei seinem Herunterfallen naſs, nicht warm, und roch stark nach Schwefel. Ob aber andere Stücke unmittelbar ins Meer gefallen waren, konnte man wegen Regen und hoher See nicht beobachten.

Dieser Stein bestand aus ungleichartigen Gemengtheilen, welche mitunter von der Gröſse einer kleinen Nuſs, und von einer zwischen licht- und dunkelbraun wechselnden Farbe waren. Im nassen Zustande war er leichter zerbrechlich, wurde aber später hart. Die dun-

---

*) Dieser Punct liegt ungefähr mit Cuba in einer Breite, mit Neufoundland in derselben Länge. Das nächste Land war Antigua, wovon das Schiff durch 10 Längengrade, von Europa durch den ganzen Ocean entfernt war.

kel gefärbten Gemengtheile waren überhaupt härter, und mehr scharfkantig. Eine Rinde war nicht vorhanden.

Dieses Factum wurde nach der Rückkehr des Hrn. *Ritter* nicht als ganz erweislich angesehen, und da es immer eine seltene Erscheinung ist, so sehe ich mich veranlaſst, jene Glaubwürdigkeit einiger Maſsen zu beweisen.

1. Auf der ganzen Reise, und auch während des Erscheinens der Wolke, war nie von einem Meteorstein die Rede gewesen, wodurch der Einwurf, als habe etwa ein Matrose in einem Mastkorb sich einen Scherz damit machen wollen, wegfällt. Übrigens waren alle Passagers, auch Hrn. *Ritter* als Gärtner nicht ausgenommen, zu wenig für physikalische Entdeckungen portirt, als daſs sie gerade in diesem Fache seltsame Gegenstände hätten beobachten oder sammeln wollen.

2. Der Einwurf, wie es möglich war, daſs ein aus solcher Höhe herabfallender Stein auf dem gewölbten Borde eines Schiffes verbleiben konnte, fällt aus mehreren Gründen weg. Denn es ist bekannt, daſs jeder auffallende Körper an Kraft der Repercussion verliert, wenn er (wie es bei diesem geschah) im Momente des Auffallens in Stücke zerspringt — und übrigens war auch das Schiff Echer mit einem Geländer von Bretern versehen, welches die, in einem sehr spitzen Winkel abprallenden Bruchtheile aufhielt.

3. Hat Hr. *Carl Ritter* noch auf der Reise selbst, sich von seinen anfänglich genannten Gefährten ein Zeugniſs über diese Erscheinung ausfertigen lassen. Cap. *Smart* nahm sich vor, das von ihm aufbewahrte Stück nach seiner Rückkehr einem Museum in England zu schenken.

4. In dem Journale des Hrn. *Ritter* ist diese Erscheinung an demselben Tage, wo sie Statt hatte, ver-

zeichnet, und die englischen Namen der Winde *(blak squall)* eigenhändig von Hrn. *Smart* hinein corrigirt.

Endlich hat diese Begebenheit auch alle innern Gründe für sich. Denn nun treten die, früher aus *Chladni* citirten Fälle hinzu, und corroboriren sich wechselseitig. Und es ist ganz in der Ordnung der Natur begründet, daſs diejenigen Ursachen, wodurch das Entstehen von was immer für Atmosphärilien bedingt ist, eben in allen Theilen der Atmosphäre hervortreten können, da ja dieſs Agentien sind, die wir mit solcher Schnelligkeit beständig über uns kreisen sehen. Es wäre auch nicht der geringste Grund vorhanden, anzunehmen, daſs, während Nebel, Thau, Regen, Schnee und Schloſsen in allen Gegenden der Erde generisch die nämlichen sind, gerade die steinartigen Atmosphärilien (wozu wir in dem Bodensatze des rothen Regens und Schnees ohnehin schon ein Übergangsglied finden), an eine oder die andere Gegend gebunden seyn sollten. Immerhin wird aber das Beobachten dieses Phänomens, zu den seltensten in diesem Fache gehören.

Das von Hrn. *Ritter* mitgebrachte Bruchstück, von der Gröſse eines kleinen Hühnereys, wird mit den andern botanischen und zoologischen Ergebnissen seiner Reise aufbewahrt.

Fig. 7.



Fig. 8.



